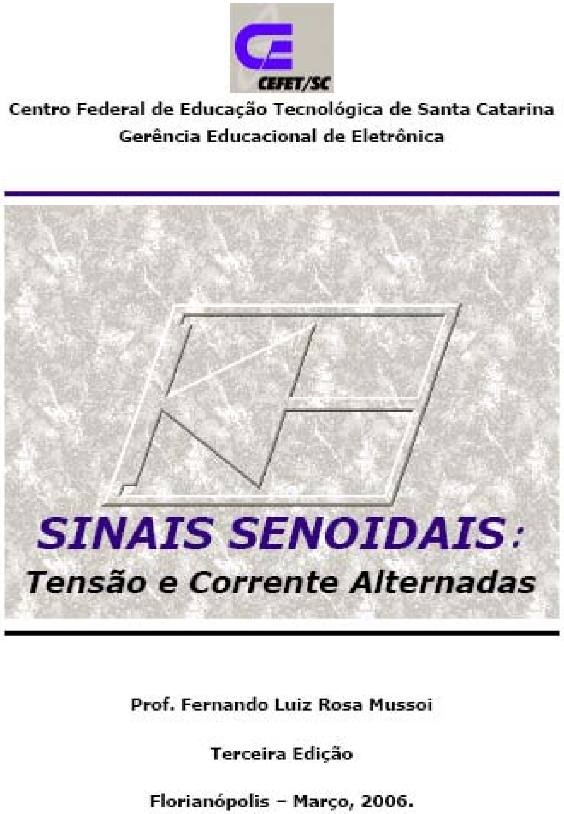
Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina
Gerência Educacional de Eletrônica
Fundamentos de Eletricidade

Fasores

Clóvis Antônio Petry, professor.

Florianópolis, dezembro de 2006.

Bibliografia



Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina
Gerência Educacional de Eletrônica

SINAIS SENOIDAIS:
Tensão e Corrente Alternadas

Prof. Fernando Luiz Rosa Mussoi

Terceira Edição

Florianópolis – Março, 2006.

Agradecemos ao Prof. Fernando L. R. Mussoi pela permissão de usar sua apostila para as aulas de Fundamentos de Eletricidade.

http://www.cefetsc.edu.br/~mussoi/sistemas_digitais/Apostila_Eletromagnetismo_v32.pdf

Nesta aula

Seqüência de conteúdos:

1. Representação fasorial de sinais senoidais;
2. Fasor;
3. Representação fasorial com números complexos;
4. Operações matemáticas com fasores;
5. Exercícios.

Representação fasorial de sinais senoidais

Exemplo 5.1.1: Sabemos que potência elétrica é o produto da tensão pela corrente. Obtenha a equação da potência elétrica multiplicando a tensão instantânea v(t)=10sen(100t) pela corrente instantânea i(t)=2sen(100t-60º):

Resolvendo, temos:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = 10\text{sen}(100t) \cdot 2\text{sen}(100t + 60^o) = 20 \cdot \text{sen}(100t) \cdot \text{sen}(100t + 60^o)$$

A questão é: como multiplicar os dois senos de ângulos diferentes?

A resposta está no uso das chamadas identidades trigonométricas. Algumas delas estão apresentadas no anexo A1. Para o produto de senos temos:

$$\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Assim:

$$p(t) = 20 \cdot \text{sen}(100t) \cdot \text{sen}(100t + 60^o) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(100t - 100t + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(100t + 100t + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

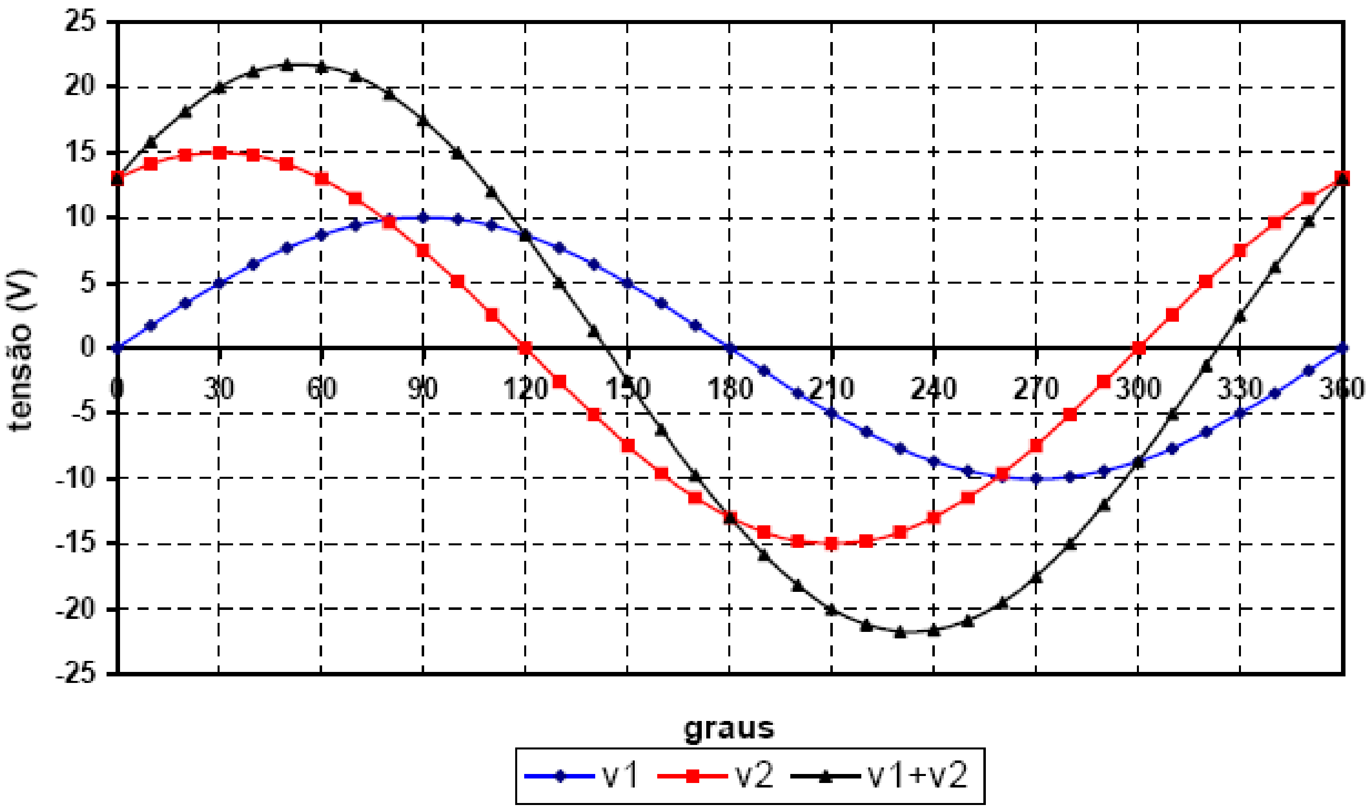
$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(200t + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0,5 \cdot \left[0,5 - \cos\left(200t + \frac{\pi}{3}\right)\right] = -0,25\cos\left(200t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Podemos concluir que uma simples multiplicação de dois sinais para a determinação da potência num circuito não é uma operação tão simples e evidente.

Representação fasorial de sinais senoidais

Exemplo 5.1.2: Sabemos que numa malha de um circuito elétrico devemos somar as tensões. Some os dois sinais de tensão na forma trigonométrica e obtenha as formas de onda, sendo $v_1(t)=10sen(100t))$ e $v_2(t)=15sen(100t+60°)$.

$$v_1(t)+v_2(t)=10sen(100t)+15sen(100t+60^o)$$



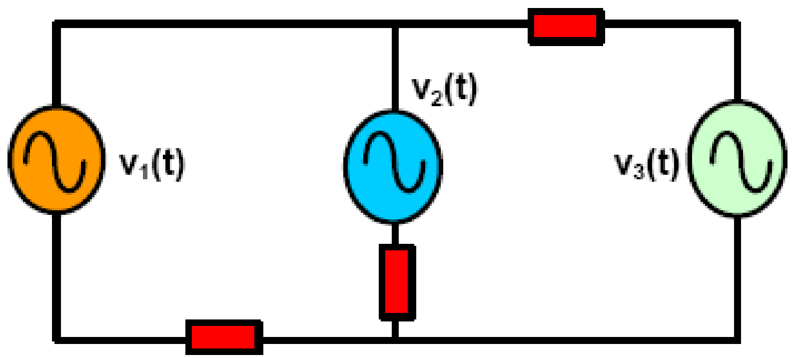
Representação fasorial de sinais senoidais

Principais parâmetros de um sinal senoidal:

- Valor de Pico: V_p e I_p
- Valor Eficaz: V_{ef} e I_{ef}
- Velocidade Angular: ω
- Freqüência: f
- Período: T
- Fase Inicial: θ

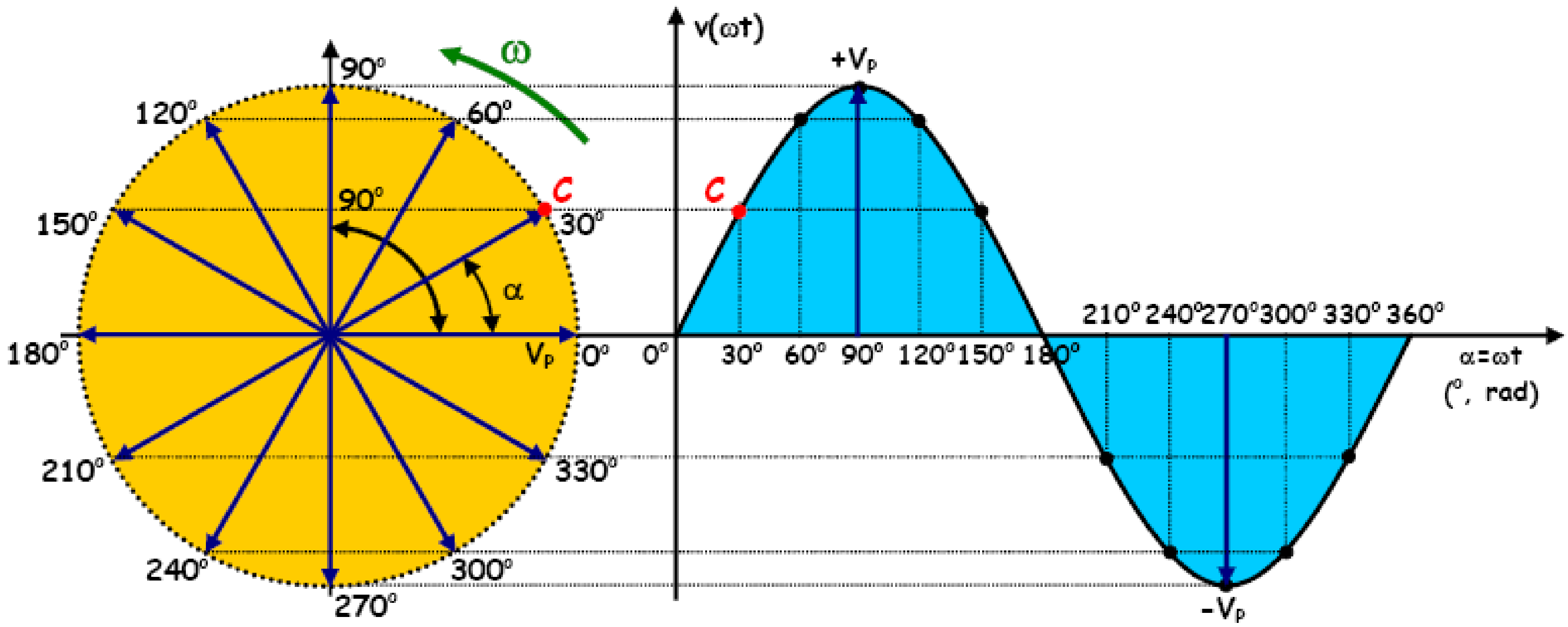
Se os sinais tiverem a mesma freqüência:

- $v_1(t) = 10.sen(200.t + 0°)$
- $v_2(t) = 5,0.sen(200.t + 45°)$
- $v_3(t) = 20.sen(200.t + 90°)$



Fasores

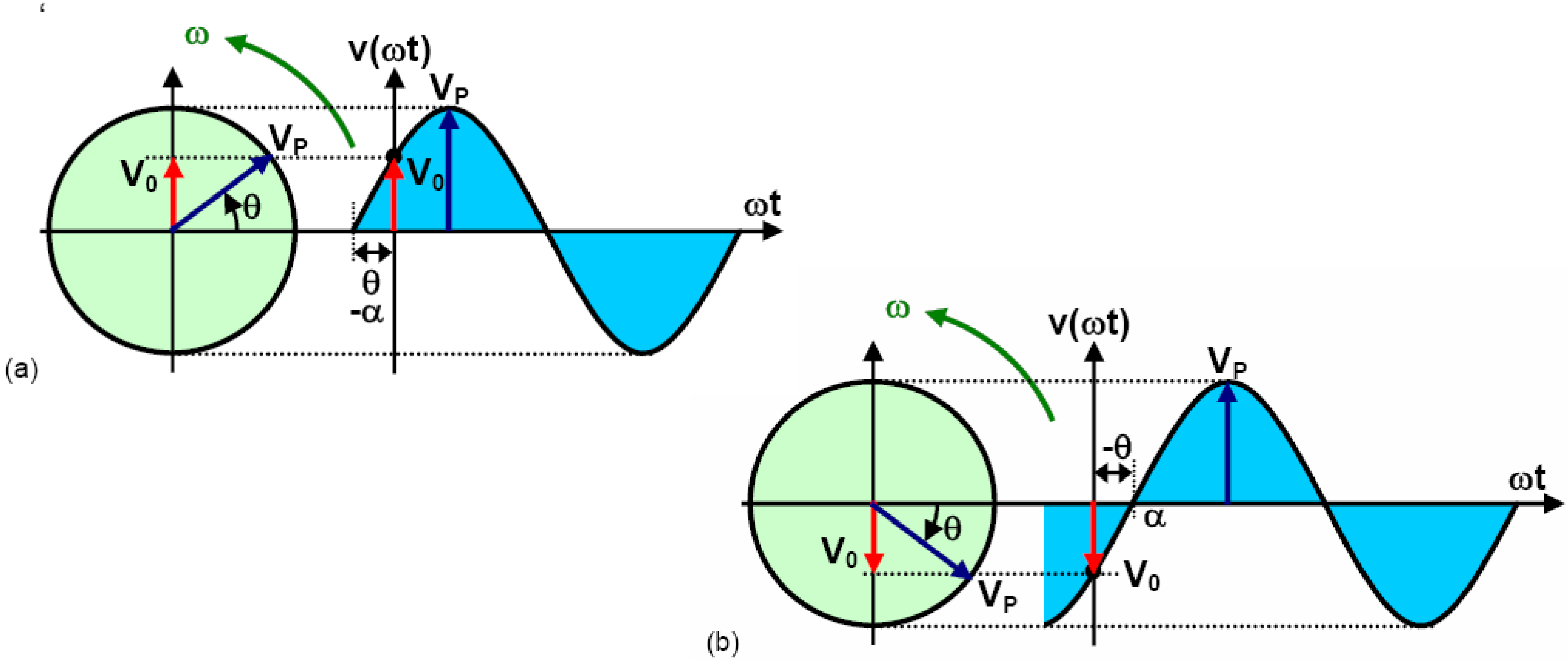
Um movimento harmônico giratório pode ser descrito por uma senóide e vice-versa.



Fasores

Uma senóide pode ser descrita por um vetor radial girante com módulo igual à sua amplitude (valor de pico) e mesma freqüência angular ω

A cada período ou ciclo completado o vetor radial girante está sempre na mesma posição angular inicial θ.



Fasores

Considerando que o vetor radial:

- gira à mesma freqüência angular ω constante da senóide de origem;
- possui mesma freqüência f e período que a senóide de origem;
- a cada volta se encontra na mesma posição inicial correspondente ao ângulo de fase inicial θ da senóide de origem
- possui um módulo constante e igual ao valor de pico V_p da senóide de origem;

Então este vetor girante "carrega" todos os parâmetros que descrevem a senóide.

Fasor é um vetor radial girante com freqüência ω, com módulo igual ao valor de pico V_P e com ângulo de fase inicial θ, que representa uma senóide de iguais parâmetros.

Fasores

$y = v(t) = V_p \,.\, \text{sen}\ w.t$ ou $y = v(\alpha) = V_p \,.\, \text{sen}\ \alpha$

$\alpha = 0^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \,.\, \text{sen}\ 0^\circ = 0$

$\alpha = 30^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \,.\, \text{sen}\ 30^\circ = 0{,}5.V_p$

$\alpha = 60^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \,.\, \text{sen}\ 60^\circ = 0{,}866.V_p$

$\alpha = 90^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \,.\, \text{sen}\ 90^\circ = 1.V_p$

$\alpha = 120^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \,.\, \text{sen}\ 120^\circ = 0{,}866.V_p$

$\alpha = 150^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \,.\, \text{sen}\ 150^\circ = 0{,}5.V_p$

$\alpha = 180^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \,.\, \text{sen}\ 180^\circ = 0$

$\alpha = 210^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \,.\, \text{sen}\ 210^\circ = -0{,}5.V_p$

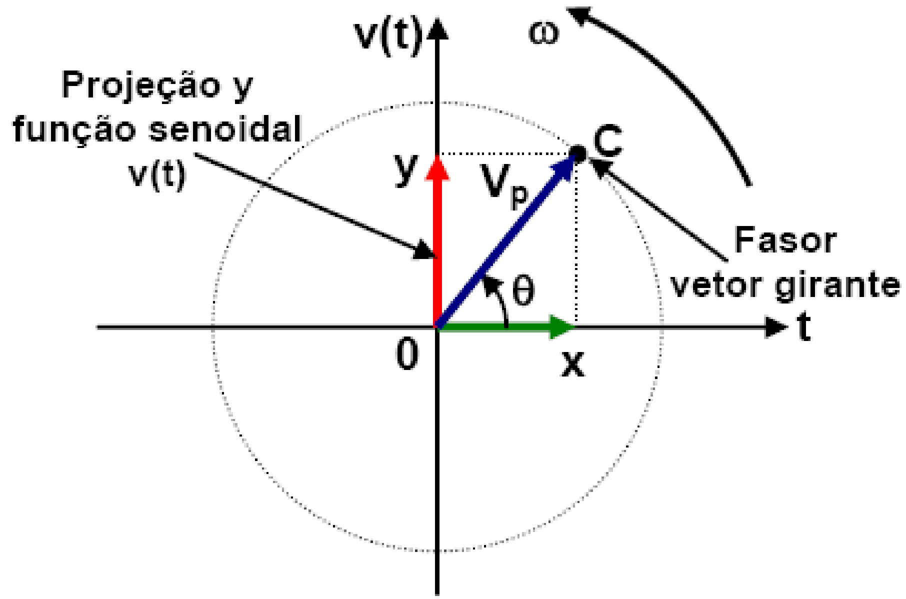
$\alpha = 240^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \,.\, \text{sen}\ 240^\circ = -0{,}866.V_p$

$\alpha = 270^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \,.\, \text{sen}\ 270^\circ = -1.V_p$

$\alpha = 300^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \,.\, \text{sen}\ 300^\circ = -0{,}866.V_p$

$\alpha = 330^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \,.\, \text{sen}\ 330^\circ = -0{,}5.V_p$

$\alpha = 370^\circ \Rightarrow v(\alpha) = V_p \,.\, \text{sen}\ 370^\circ = 0$



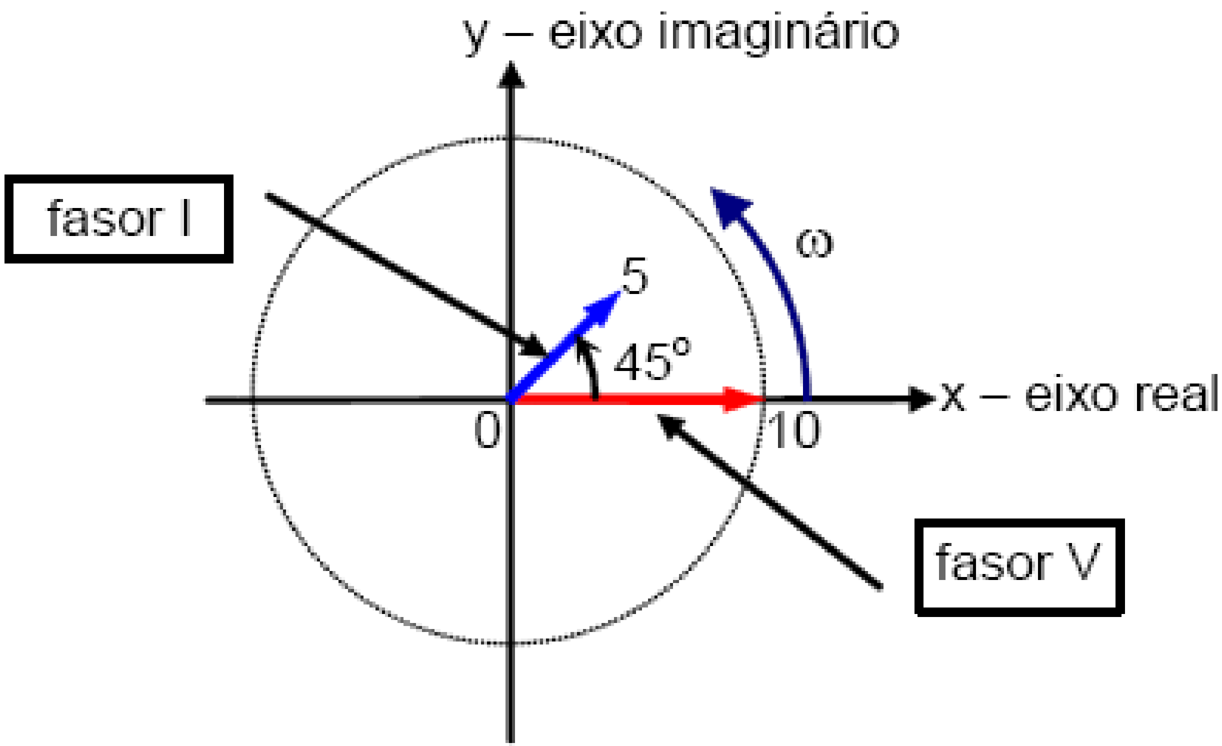
Fasores

Exemplo 5.2.1: Representar graficamente os sinais senoidais através do diagrama fasorial e de sua projeção senoidal:

$v(t) = 10.sen(100t + 0^o)$ V

$i(t) = 5.sen(100t + 45^o)$ A

Qual a defasagem entre os sinais?



Fasores

Exemplo 5.2.3: Um fasor de tensão de módulo 10 descreve uma rotação completa em 0,02s partindo da posição inicial -30°. Determine:

a) o diagrama fasorial para o instante inicial e obtenha o comportamento senoidal desse sinal;

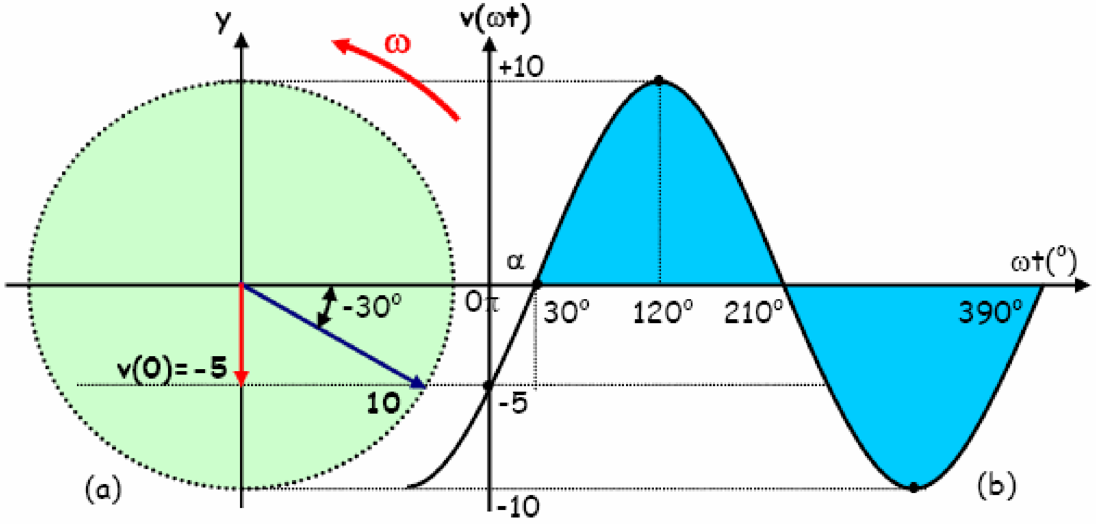
b) o ângulo em que a tensão é 10V.

c) a freqüência angular e a expressão matemática para as variações instantâneas desse sinal;

d) o valor da tensão no instante t=0s;

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}02} = 314{,}16 \text{rad/s}$$

$$v(t) = V_P \text{sen}(\omega t + \theta) = 10\text{sen}(314{,}16 \cdot t - \frac{\pi}{6})$$



Fasores e números complexos

Forma retangular

$C = x + jy$

Forma polar

$C = z \angle \theta$

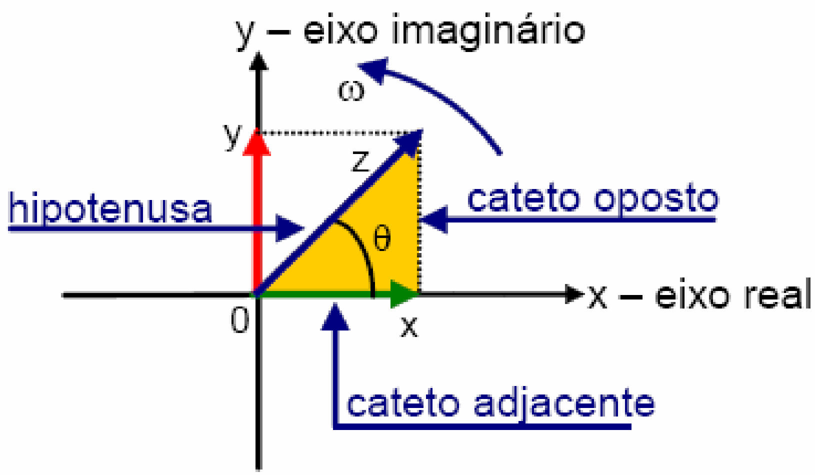
x – número real

y – número imaginário

j – operador imaginário ($j = \sqrt{-1}$)

z – módulo

θ - ângulo ou argumento.



Fasores e números complexos

Função no tempo:

$$v(t) = V_p \cdot sen(\omega \cdot t \pm \theta)$$

Função fasorial:

$$\dot{V} = V_p \angle \pm \theta$$

$$\dot{V} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \angle \pm \theta$$

$$\dot{V} = V_{ef} \angle \pm \theta$$

$\dot{V}$ - fasor representado por um número complexo;

V_p – valor de pico (amplitude) do sinal senoidal de origem;

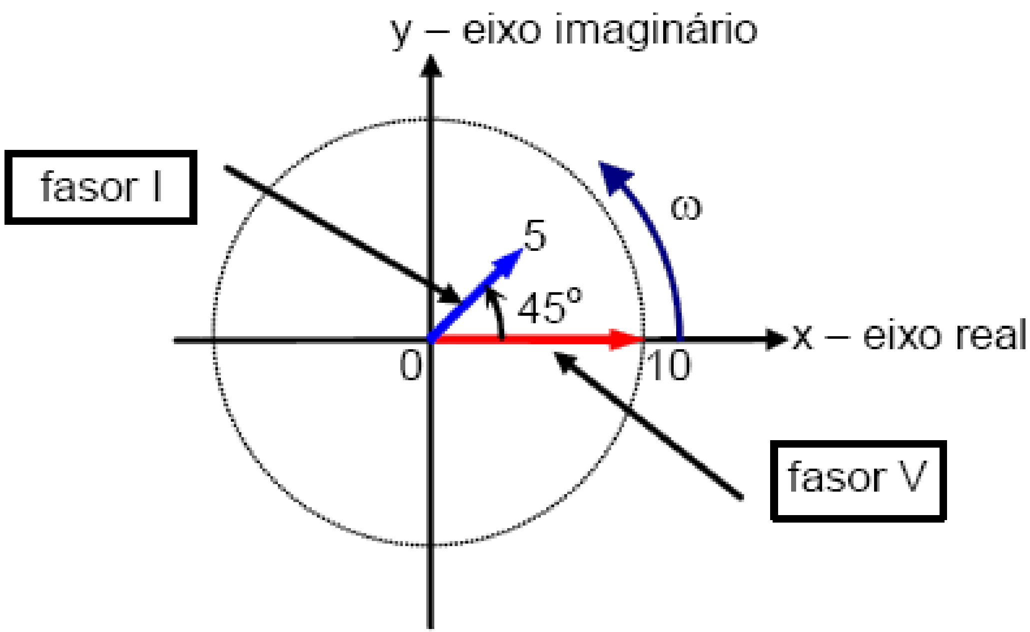
θ - ângulo de fase inicial do sinal senoidal de origem.

Um fasor é um número complexo na forma polar.

Fasores e números complexos

$v(t) = 10.sen(100t + 0^o)$ V

$i(t) = 5.sen(100t + 45^o)$ A



Na forma polar:

$$\dot{V} = \frac{10}{\sqrt{2}}\angle 0^o = 7{,}07\angle 0^o \quad V$$

$$\dot{I} = \frac{5}{\sqrt{2}}\angle +45^o = 3{,}54\angle +45^o \quad A$$

Na forma retangular:

$\dot{V} = 7{,}07 + j0$ V $\qquad \dot{I} = 2{,}5 + j2{,}5$ A

Fasores e números complexos

Exemplo 5.3.2: *transforme para o domínio fasorial os sinais senoidais:*

a) $v(t) = 311 \cdot \text{sen}(377 \cdot t)\,V$ $\Rightarrow$ ____________________

b) $i(t) = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(\varpi t + 30^{o})\,A$ $\Rightarrow$ ____________________

c) $v(t) = 50 \cdot \cos(\omega t - 15^{o})\,mV$ $\Rightarrow$ ____________________

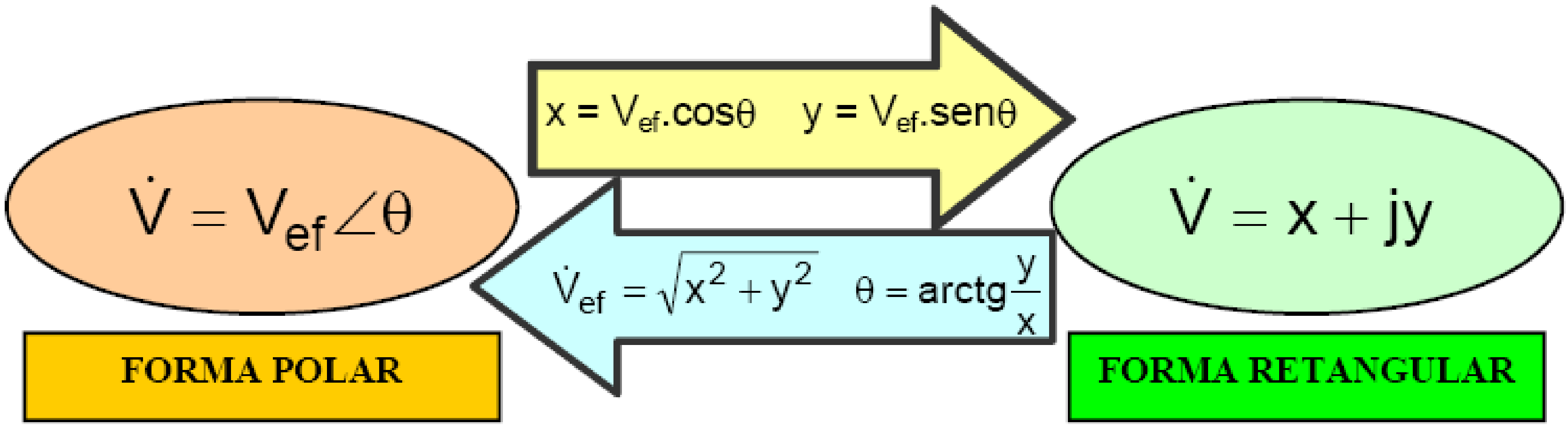
Exemplo 5.3.3: *transforme para o domínio do tempo os seguintes fasores:*

a) $\dot{I} = 110\angle 60^{o}\,\mu A$ $\Rightarrow$ ____________________

b) $\dot{V} = 20\angle -45^{o}\,V$ $\Rightarrow$ ____________________

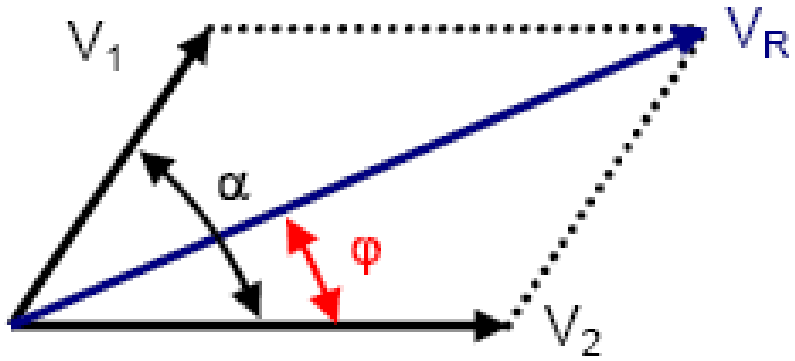
Operações matemáticas com fasores

A álgebra fasorial para sinais senoidais é aplicável somente para sinais de mesma freqüência.



Operações matemáticas com fasores

Operações gráficas:



$$V_R = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{V_2 \cdot \mathrm{sen}\,\alpha}{V_1 + V_2 \cdot \cos\alpha}\right)$$

Operações matemáticas com fasores

Exemplo 5.4.1: *some e subtraia os sinais senoidais* $v_1(t) = 20 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377t + 45^o)$ *e* $v_2(t) = 40 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377t - 30^o)$*:*

$$\dot{V}_1 = 20\angle 45^o\,\text{V e } \dot{V}_2 = 40\angle -30^o\,\text{V}$$

$$\dot{V}_1 = 14{,}14 + j14{,}14\,\text{V e } \dot{V}_2 = 34{,}64 - j20\,\text{V}$$

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = (14{,}14 + j14{,}14) + (34{,}64 - j20) = (14{,}14 + 34{,}64) + j(14{,}14 - j20) = 48{,}78 - j5{,}86\,\text{V}$$

$$\dot{V}_1 - \dot{V}_2 = (14{,}14 + j14{,}14) - (34{,}64 - j20) = (14{,}14 - 34{,}64) + j(14{,}14 + j20) = -20{,}5 + j34{,}14\,\text{V}$$

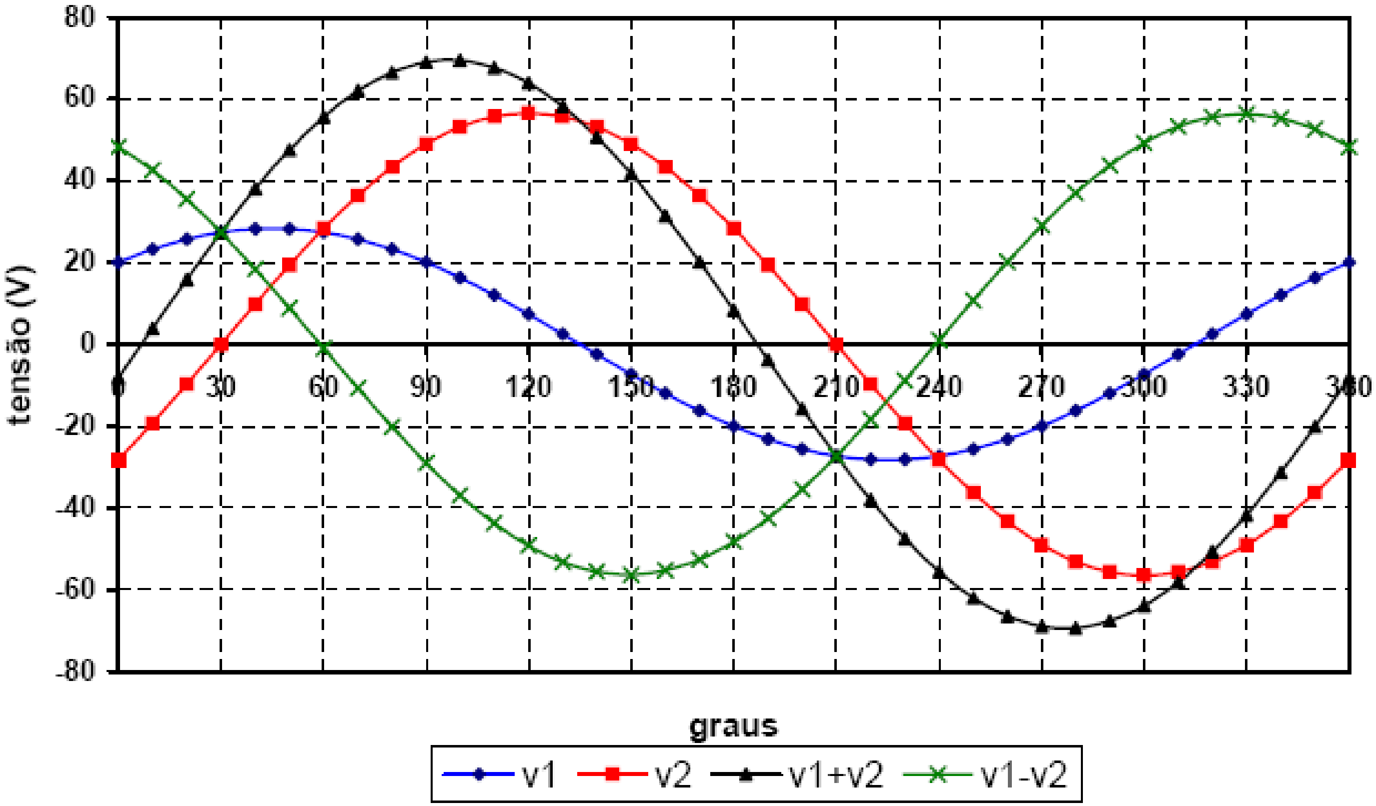
$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 49{,}13\angle -6{,}85^o\,\text{V}$$

$$\dot{V}_1 - \dot{V}_2 = 39{,}82\angle 120^o\,\text{V}$$

$$v_1(t) + v_2(t) = 49{,}13 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t - 6{,}85^o)\,\text{V}$$

$$v_1(t) - v_2(t) = 39{,}82 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(377 \cdot t + 120^o)\,\text{V}$$

Operações matemáticas com fasores



Resumo

	Tensão (V)	*Corrente (A)*
Valor Instantâneo Domínio do Tempo ***Forma Trigonométrica***	$v(t) = V_p \cdot sen(\omega \cdot t \pm \theta_v)$	$i(t) = I_p \cdot sen(\omega \cdot t \pm \theta_i)$
Fasor Domínio Fasorial ***Forma Polar***	$\dot{V} = V_{ef} \angle \theta_v$	$\dot{I} = I_{ef} \angle \theta_i$
Fasor Domínio Fasorial ***Forma Retangular*** ***(Cartesiana)***	$\dot{V} = V_{ef} \cdot \cos\theta_v + j \cdot V_{ef} \cdot sen\,\theta_v$	$\dot{I} = I_{ef} \cdot \cos\theta_i + j \cdot I_{ef} \cdot sen\,\theta_i$
Valor Eficaz (Médio Quadrático, RMS)	$V_{ef} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$	$I_{ef} = \frac{I_p}{\sqrt{2}}$

Exercícios