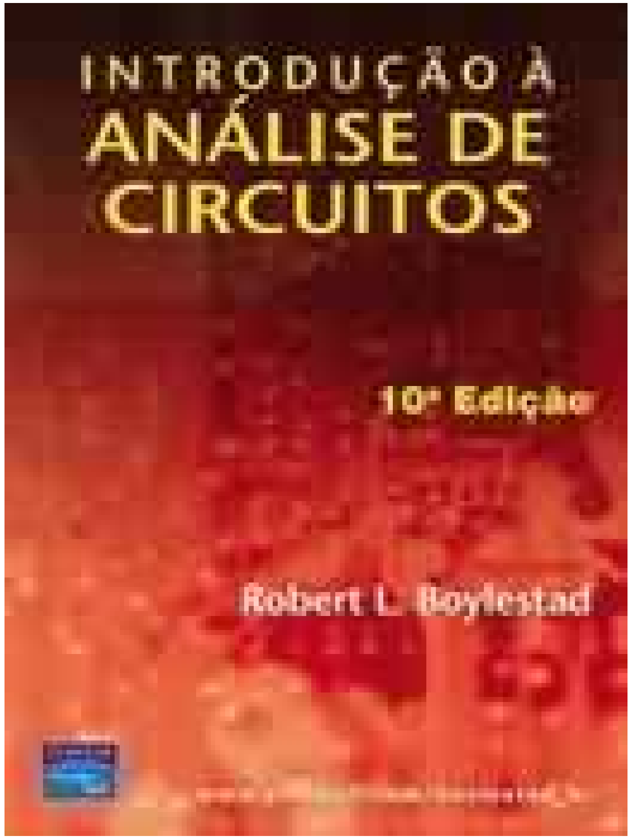
Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina
Departamento de Eletrônica
Retificadores

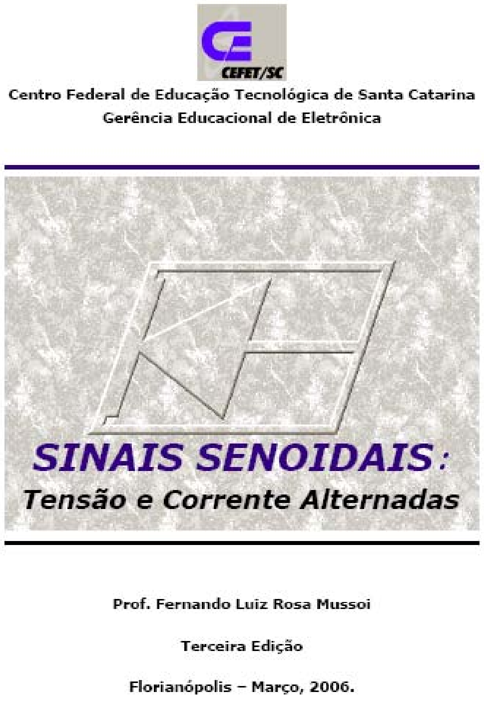
Números complexos e Representação fasorial

Clóvis Antônio Petry, professor.

Florianópolis, abril de 2007.

Bibliografia para esta aula





www.cefetsc.edu.br/~petry

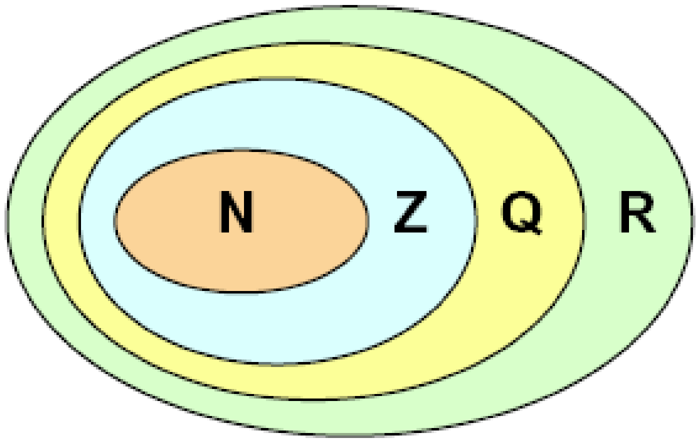
Nesta aula

Seqüência de conteúdos:

1. Plano cartesiano complexo;
2. Forma retangular ou cartesiana;
3. Forma polar;
4. Conversão entre formas;
5. Operações com números complexos;
6. Representação fasorial de sinais senoidais;
7. Fasor;
8. Representação fasorial com números complexos;
9. Operações com fasores.

Plano cartesiano complexo

- Conjunto dos Números Naturais: **N** = $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Conjunto dos Números Inteiros: **Z** = $\{\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\}$
- Conjunto dos Números Racionais: **Q** = $\{x \,/\, x = \frac{p}{q};\ p \text{ e } q \in \mathbf{Z} \text{ e } q \neq 0\}$
- Conjunto dos Números Reais: **R** = { racionais e irracionais }



$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

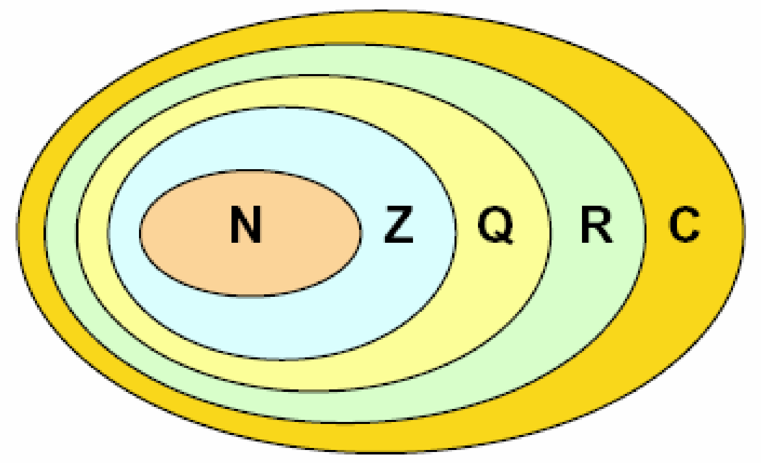
$$x = \pm\sqrt{-1}$$

Para resolver este problema:

$$j^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad j = \sqrt{-1}$$

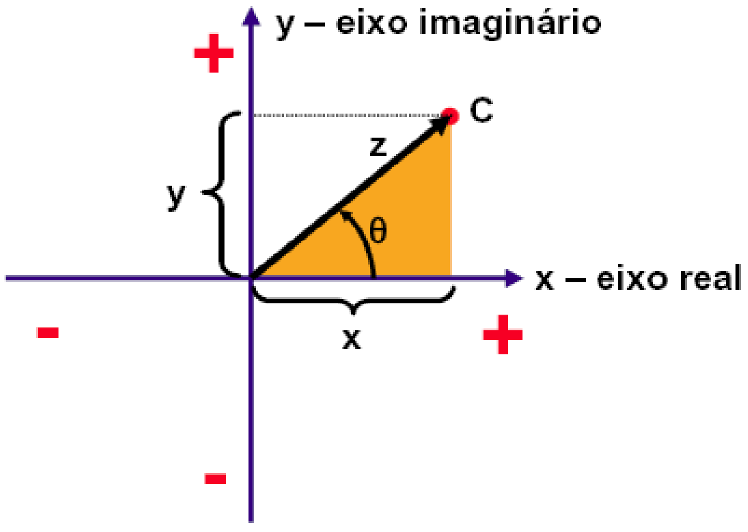
Plano cartesiano complexo

Conjunto dos números complexos:



Um número imaginário está deslocado de 90° de um número real no plano cartesiano.

Um número complexo é um ponto no plano cartesiano complexo.



Forma retangular ou cartesiana

Um número complexo na Forma Retangular (ou Cartesiana) é composto por uma parte real e uma parte imaginária

$$C = x + jy$$

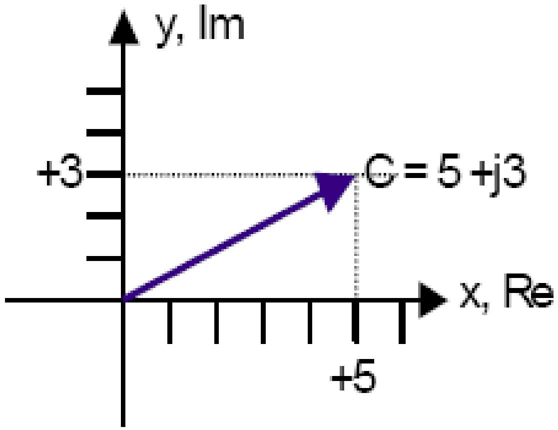
C – número complexo na forma retangular;

x – projeção no eixo x (abscissa) referente à parte real;

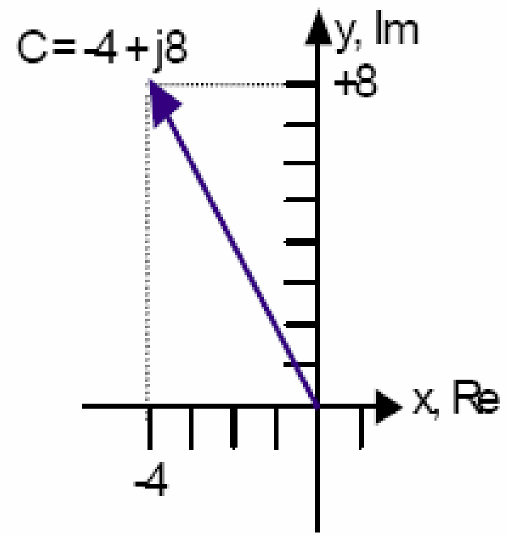
y – projeção no eixo y (ordenada) referente à parte imaginária.

Exemplos:

$C = 5 + j3$



$C = -4 + j8$



Forma polar

Um número complexo na Forma Polar é um número composto por um vetor e um ângulo.

$$C = \mathbf{z}\angle\theta$$

C - número complexo na forma polar;

z – módulo (comprimento) do vetor radial desde a origem até o ponto (**z**>0);

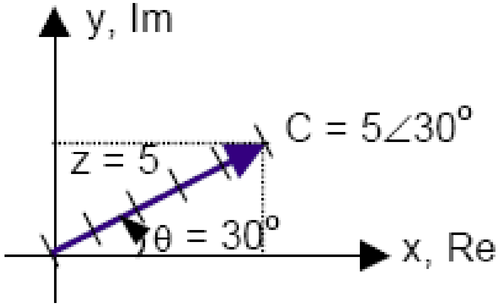
θ - argumento (ângulo) do vetor desde o eixo horizontal, medido no sentido anti-horário.

Ângulos positivos (+) *são medidos no* ***sentido anti-horário*** *a partir do eixo horizontal x.*

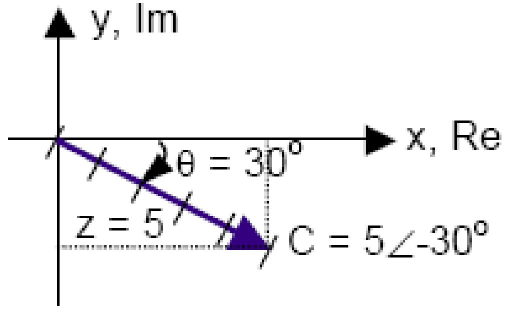
Ângulos negativos (-) *são medidos* ***no sentido horário*** *a partir do eixo horizontal x.*

Exemplos:

$C = 5 \angle 30^o$



$C = 5 \angle -30^o$



Conversão entre formas

Conversão de retangular para polar:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

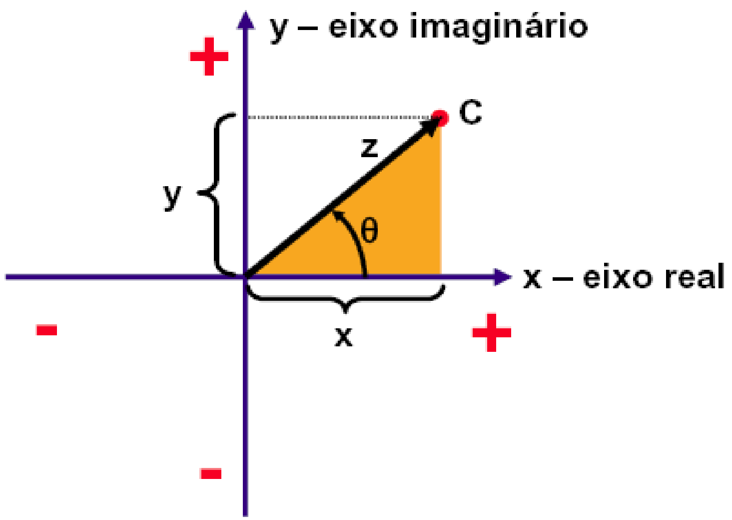
$$C = z\angle\theta = \sqrt{x^2 + y^2}\angle\left[\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemplos: $C = 60 + j80$

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$



$$z = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$$

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{80}{60}\right) = 53{,}13^{o}$$

$$C = 100\angle 53{,}13^{o}$$

Plano cartesiano complexo

Conversão de polar para retangular:

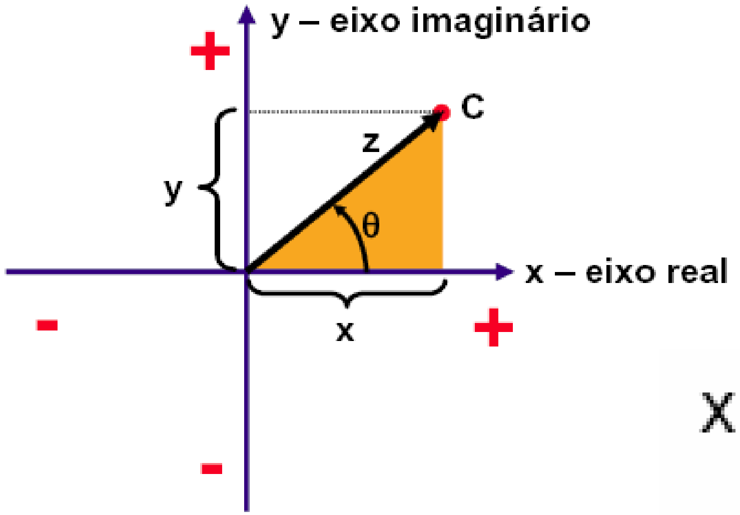
$$\cos\theta = \frac{x}{z}$$

$$x = z \cdot \cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{z}$$

$$y = z \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$C = x + jy = z \cdot \cos\theta + j(z \cdot \operatorname{sen}\theta)$$



Exemplos:

$$C = 200\angle 45^\circ$$

$$x = 200 \cdot \cos 45^\circ = 141{,}42$$

$$y = 200 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = 141{,}42$$

$$C = 141{,}42 + j141{,}42$$

Operações com números complexos

Lembrar que:

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

$$j^2 = -1$$

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \left(\frac{j}{j}\right) = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

Operações com números complexos

Conjugado complexo:

$$C = x + jy = \mathbf{z}\angle\theta$$

$$C^{*} = x - jy = \mathbf{z}\angle -\theta$$

Exemplos:

a) $C = 5 + j7 \quad \Rightarrow \quad C^{*} = 5 - j7$

b) $C = 100\angle{-30^\circ} \quad \Rightarrow \quad C^{*} = 100\angle{+30^\circ}$

Adição e subtração de números complexos

Soma e Subtração algébrica de números complexos são feitas na forma retangular.

Somam-se ou subtraem-se algebricamente as partes reais e as partes imaginárias, separadamente.

$$C_1 + C_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$C_1 - C_2 = (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Exemplos:

$$(3 + j4) + (5 + j6) = (3 + 5) + (j4 + j6) = 8 + j10$$

$$(3 + j4) - (5 + j6) = (3 - 5) + (j4 - j6) = -2 - j2$$

Multiplicação e divisão de números complexos

Multiplicação de números complexos é feita na forma polar.

$$C_1 \cdot C_2 = \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 \angle(\theta_1 + \theta_2)$$

Divisão de números complexos é feita na forma polar.

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\mathbf{z}_1 \angle \theta_1}{\mathbf{z}_2 \angle \theta_2} = \frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} \angle(\theta_1 - \theta_2)$$

Exemplos:

$$10\angle 45^o \times 20\angle 30^o = 10 \times 20 \angle(45^o + 30^o) = 200 \angle 75^o$$

$$10\angle 45^o / 20\angle 30^o = 10/20 \angle(45^o - 30^o) = 0{,}5 \angle 15^o$$

Representação fasorial

- Tensão instantânea: $v(t) = V_p \,.\, \text{sen}\,(w.t \pm \theta_V)$
- Corrente instantânea: $i(t) = I_p \,.\, \text{sen}\,(w.t \pm \theta_I)$

Calcular a potência para: $v(t)=10\text{sen}(100t)$ $i(t)=2\text{sen}(100t\text{-}60^o)$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = 10\text{sen}(100t) \cdot 2\text{sen}(100t + 60^o) = 20 \cdot \text{sen}(100t) \cdot \text{sen}(100t + 60^o)$$

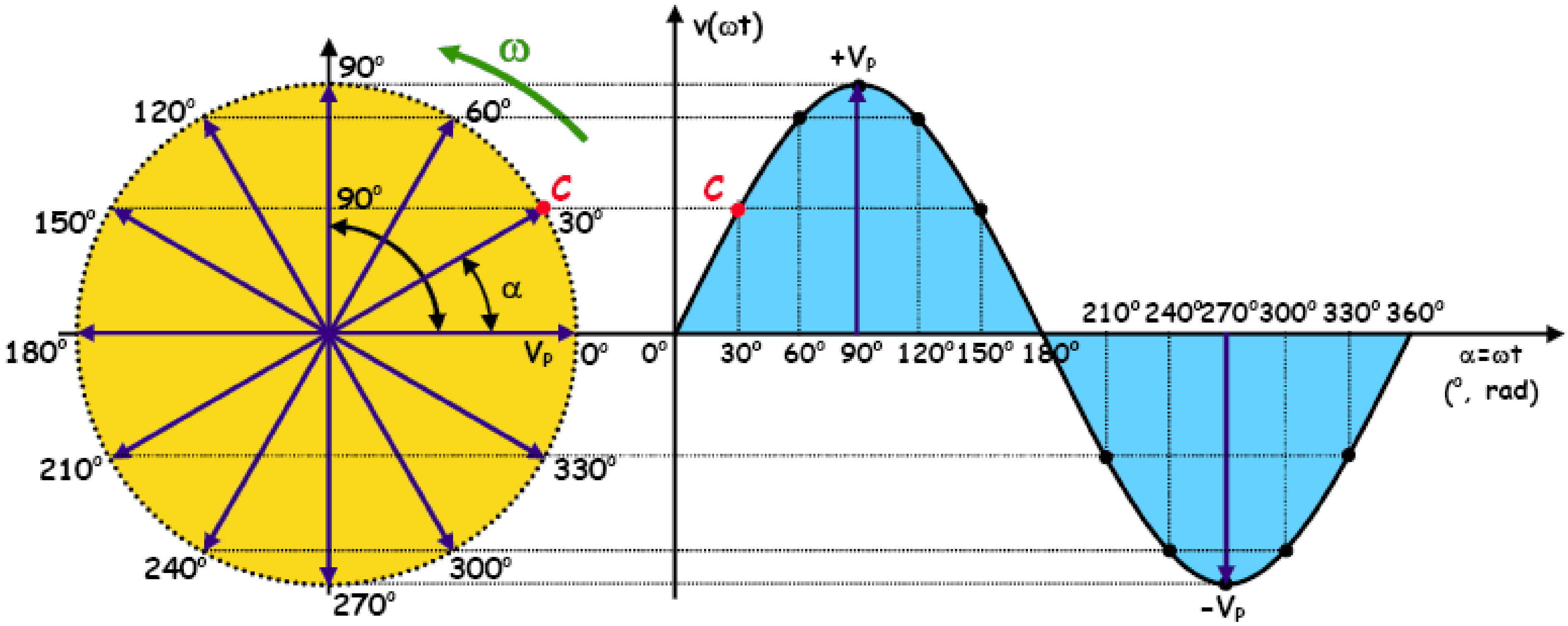
$$\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$p(t) = 20 \cdot \text{sen}(100t) \cdot \text{sen}(100t + 60^o) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(100t - 100t + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(100t + 100t + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(200t + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0{,}5 \cdot \left[0{,}5 - \cos\left(200t + \frac{\pi}{3}\right)\right] = -0{,}25\cos\left(200t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Fasores

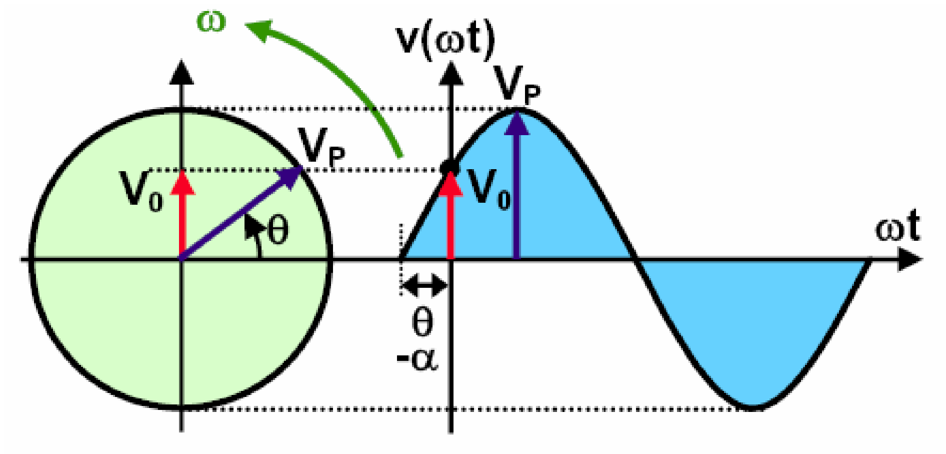
Um movimento harmônico giratório pode ser descrito por uma senóide e vice-versa.

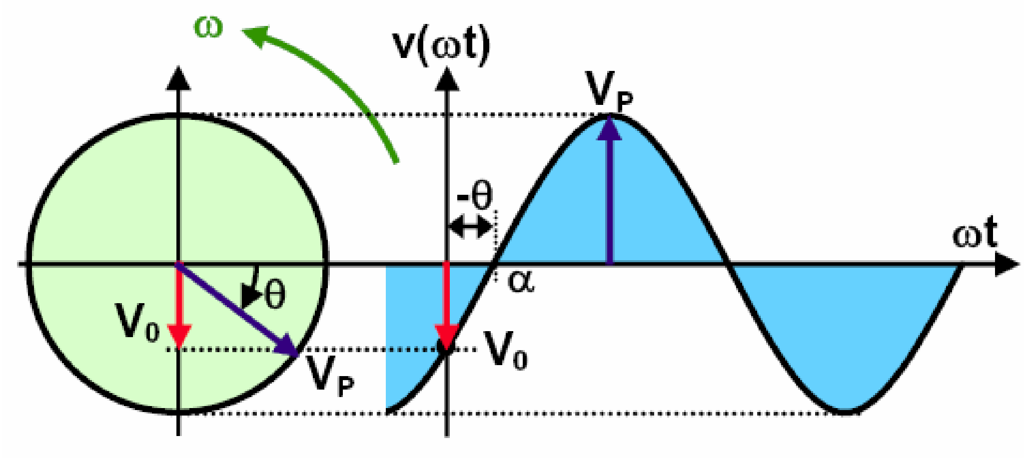


Fasores

Uma senóide pode ser descrita por um vetor radial girante com módulo igual à sua amplitude (valor de pico) e mesma freqüência angular ω

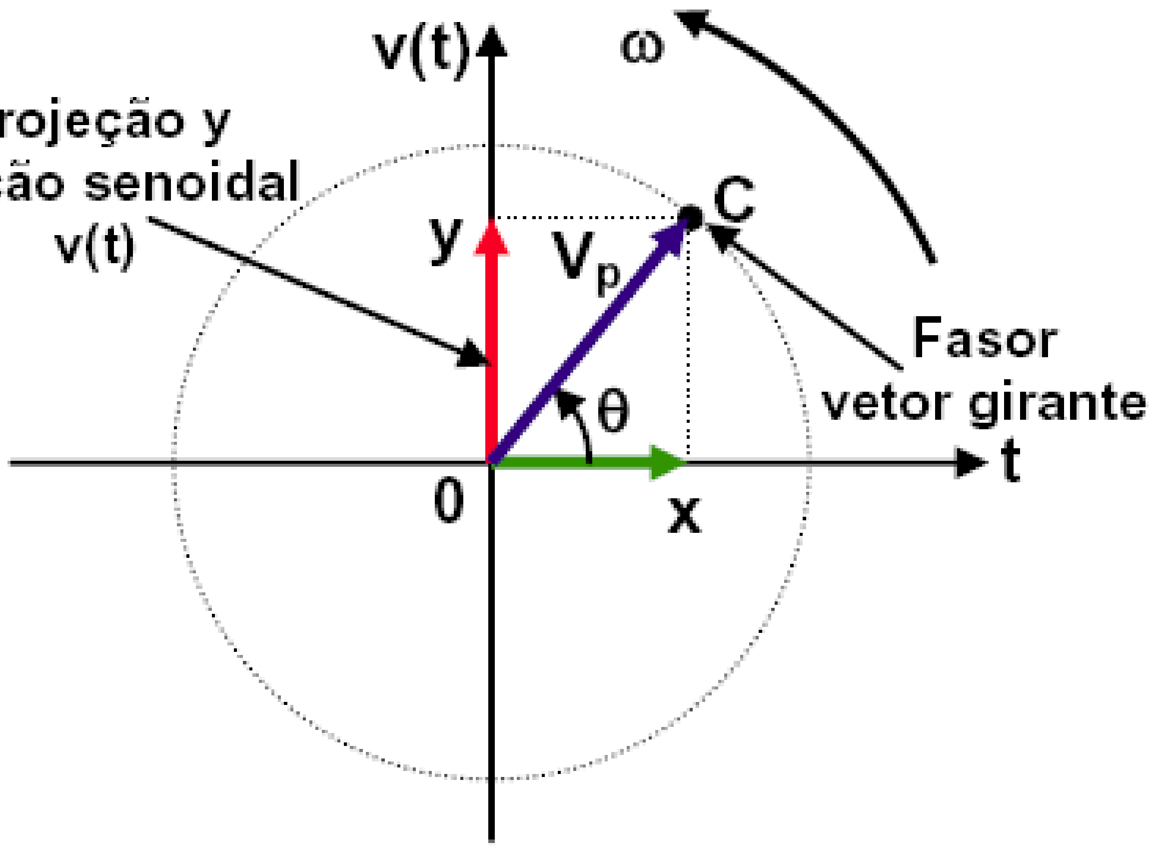
A cada período ou ciclo completado o vetor radial girante está sempre na mesma posição angular inicial θ.





Fasores

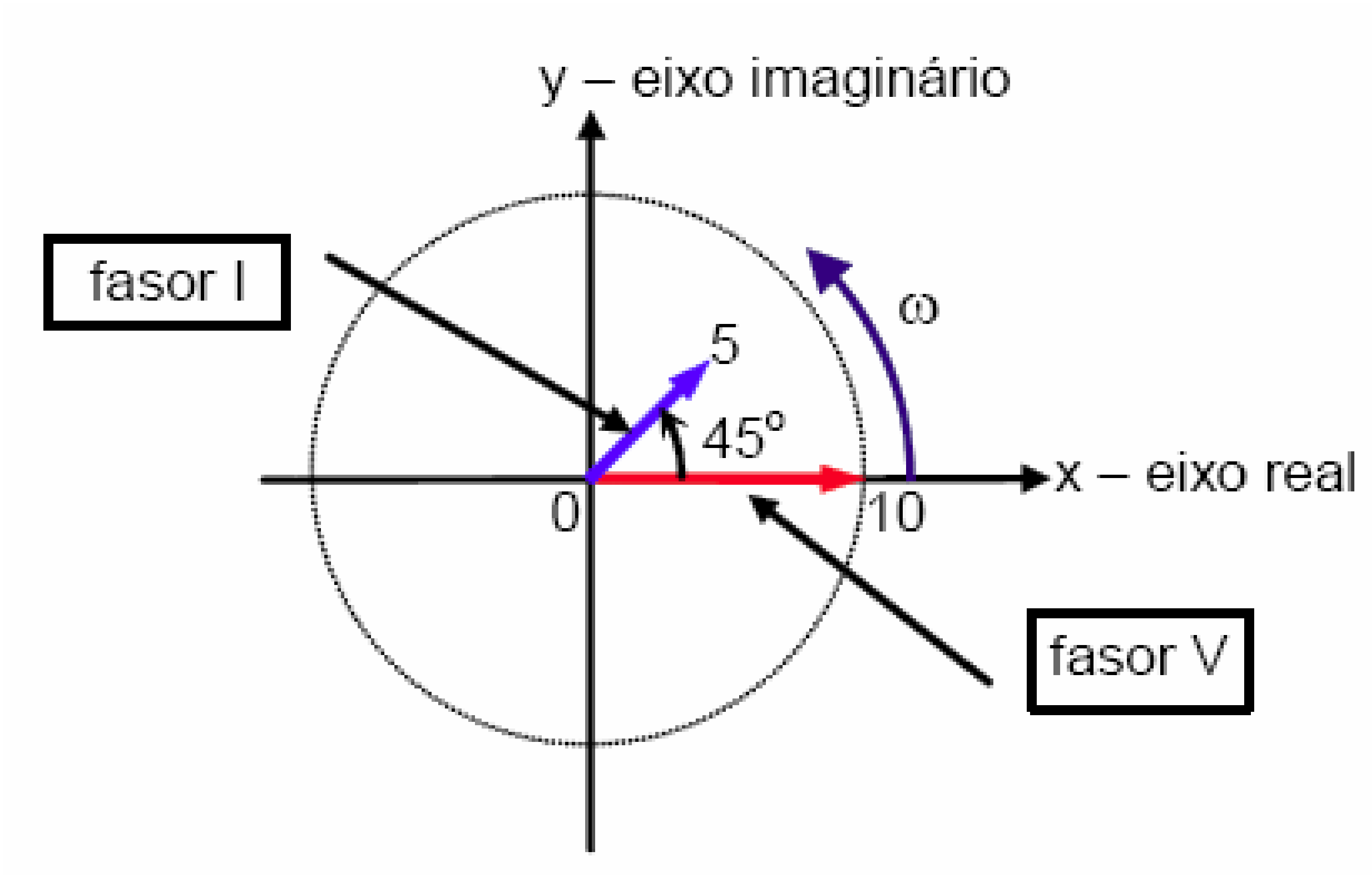
Fasor é um vetor radial girante com freqüência ω, com módulo igual ao valor de pico V_P e com ângulo de fase inicial θ, que representa uma senóide de iguais parâmetros.



Fasores

$v(t) = 10.sen(100t + 0^\circ)$ V

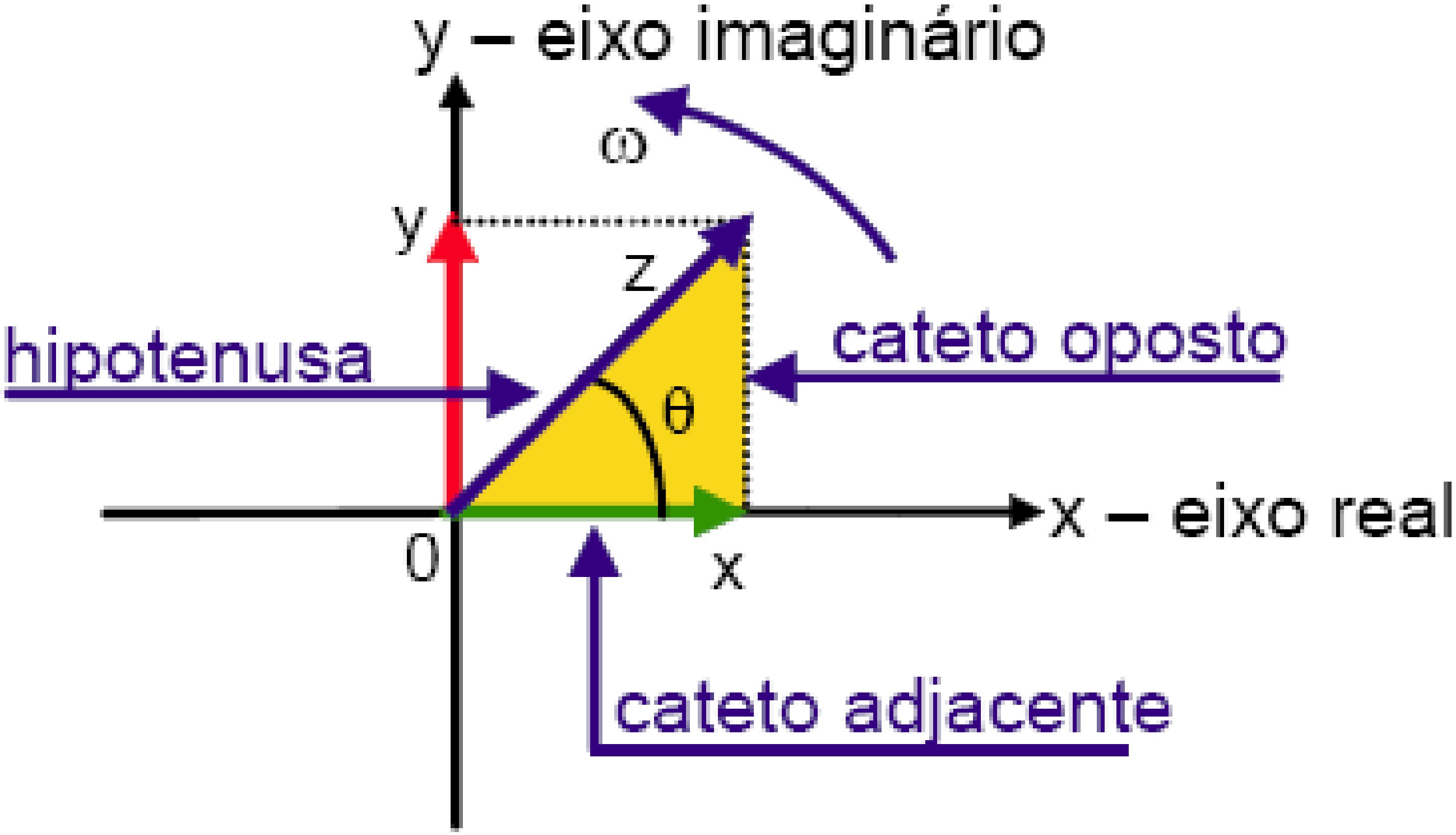
$i(t) = 5.sen(100t + 45^\circ)$ A



Fasores

$C = x + jy$

$C = z \angle \theta$



Fasores

Um fasor é um número complexo na forma polar.

Fasor Tensão: $\dot{V} = V_{ef} \angle \theta_v$

Fasor Corrente: $\dot{I} = I_{ef} \angle \theta_i$

Exemplos:

a) $v(t) = 311 \cdot sen(377 \cdot t)\,V \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = 220\angle 0^o\,V$

b) $i(t) = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot sen(\varpi t + 30^o)\,A \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = 10\angle 30^o\,A$

c) $v(t) = 50 \cdot cos(\omega t - 15^o)\,mV \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = \dfrac{50}{\sqrt{2}}\angle 75^o\,mV$

Na próxima aula

Seqüência de conteúdos:

1. Relação entre tensão e corrente nos elementos passivos.