Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina
Departamento Acadêmico de Eletrônica
Retificadores

Números Complexos, Conversão de Formas e Operações Matemáticas

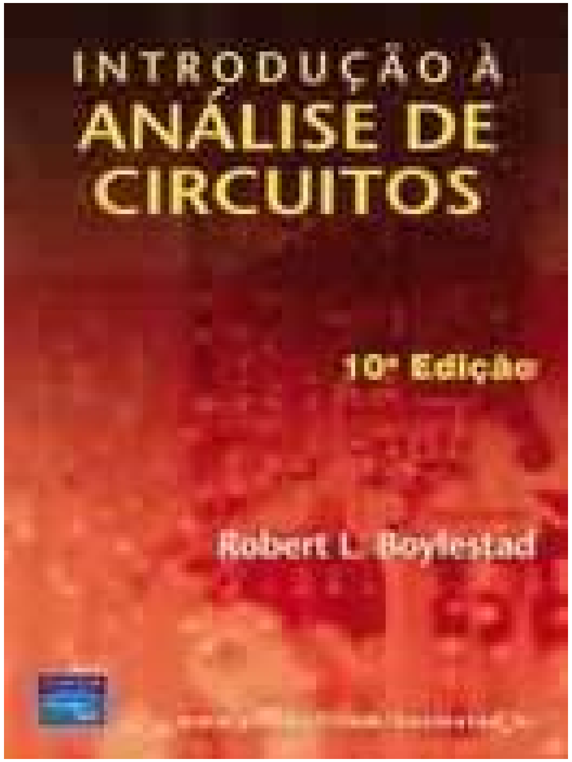
Prof. Clóvis Antônio Petry.

Florianópolis, fevereiro de 2008.

Bibliografia para esta aula

Capítulo 14: Os Dispositivos Básicos e os Fasores

1. Números complexos;
2. Operações com números complexos.

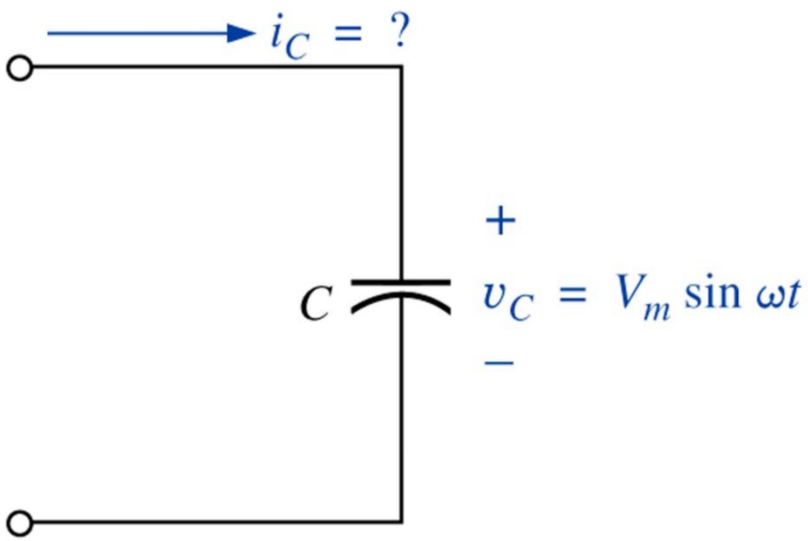


Nesta aula

Seqüência de conteúdos:

1. Revisão;
2. Números complexos;
3. Forma retangular;
4. Forma polar;
5. Conversão de formas;
6. Complexo conjugado;
7. Inverso;
8. Adição e subtração;
9. Multiplicação e divisão.

Resposta do capacitor em CA



Para uma dada tensão:

$$v_c(t) = V_m \cdot sen(\omega t)$$

$$i_C(t) = C\frac{d(v_C(t))}{dt}$$

$$i_C(t) = C\frac{d(V_m \cdot sen(\omega t))}{dt}$$

$$i_C(t) = \omega \cdot C \cdot V_m \cdot cos(\omega t)$$

$$\boxed{i_C(t) = C\frac{d(v_C(t))}{dt}}$$

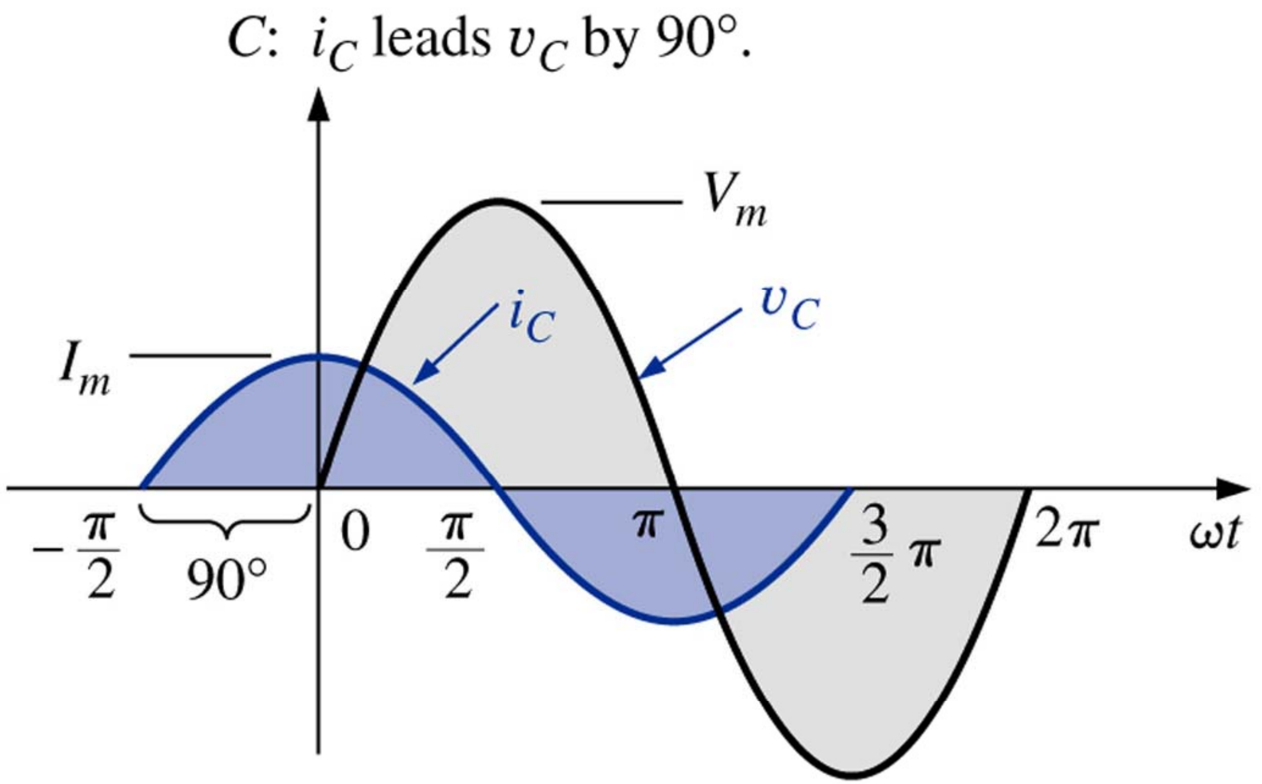
Relação *v x i* no capacitor

$$I_m = \omega \cdot C \cdot V_m$$

$$i_C(t) = I_m \cdot sen(\omega t + 90^o)$$

Resposta do capacitor em CA

Para um capacitor, i_C está adiantada 90º em relação a v_C. Em outras palavras, v_C está atrasada 90º em relação a i_C.



Comportamento de R, L e C com a freqüência

$$R$$

Resistor

$$X_L = \omega \cdot L$$

Indutor

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Capacitor

Freqüência	Elemento		
$f \Rightarrow 0\,Hz$	R	$X_L = 2\pi \cdot 0 = 0\,\Omega$	$X_C = \frac{1}{2\pi \cdot 0 \cdot C} = \frac{1}{0} = \infty\,\Omega$
$f \Rightarrow \infty\,Hz$	R	$X_L = 2\pi \cdot \infty = \infty\,\Omega$	$X_C = \frac{1}{2\pi \cdot \infty \cdot C} = \frac{1}{\infty} = 0\,\Omega$

Potência média em CA

Considerando que em determinado elemento se tenha:

$$v(t) = V_m \cdot sen(\omega t + \theta_v) \qquad i(t) = I_m \cdot sen(\omega t + \theta_i)$$

A potência será:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_m \cdot sen(\omega t + \theta_v) \cdot I_m \cdot sen(\omega t + \theta_i)$$

$$p(t) = V_m \cdot I_m \cdot sen(\omega t + \theta_v) \cdot sen(\omega t + \theta_i)$$

Após usar identidades trigonométricas e algumas manipulações:

$$p(t) = \left[\frac{V_m I_m}{2} \cdot cos(\theta_v - \theta_i)\right] - \left[\frac{V_m I_m}{2} \cdot cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\right]$$

Valor fixo

Valor que varia no tempo

Potência média em CA

No resistor:

$$\theta = \theta_v - \theta_i = 0^o$$

Defasagem entre tensão e corrente

$$P = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot cos\left(0\right) = V_{ef} \cdot I_{ef} = \frac{V_m I_m}{2}$$

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{R} \qquad P = V_{ef} \cdot I_{ef} = V_{ef} \cdot \frac{V_{ef}}{R} = \frac{V_{ef}{}^2}{R}$$

$$V_{ef} = R \cdot I_{ef} \qquad P = V_{ef} \cdot I_{ef} = R \cdot I_{ef} \cdot I_{ef} = R \cdot I_{ef}{}^2$$

Potência média em CA

No indutor:

Defasagem entre tensão e corrente

$$\theta = \theta_v - \theta_i = 0 - \left(-90^o\right) = 90^o$$

$$P = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot cos\left(90^o\right) = 0\ W$$

A potência média ou potência dissipada por um indutor ideal (sem resistência associada) é zero.

Potência média em CA

No capacitor:

Defasagem entre tensão e corrente

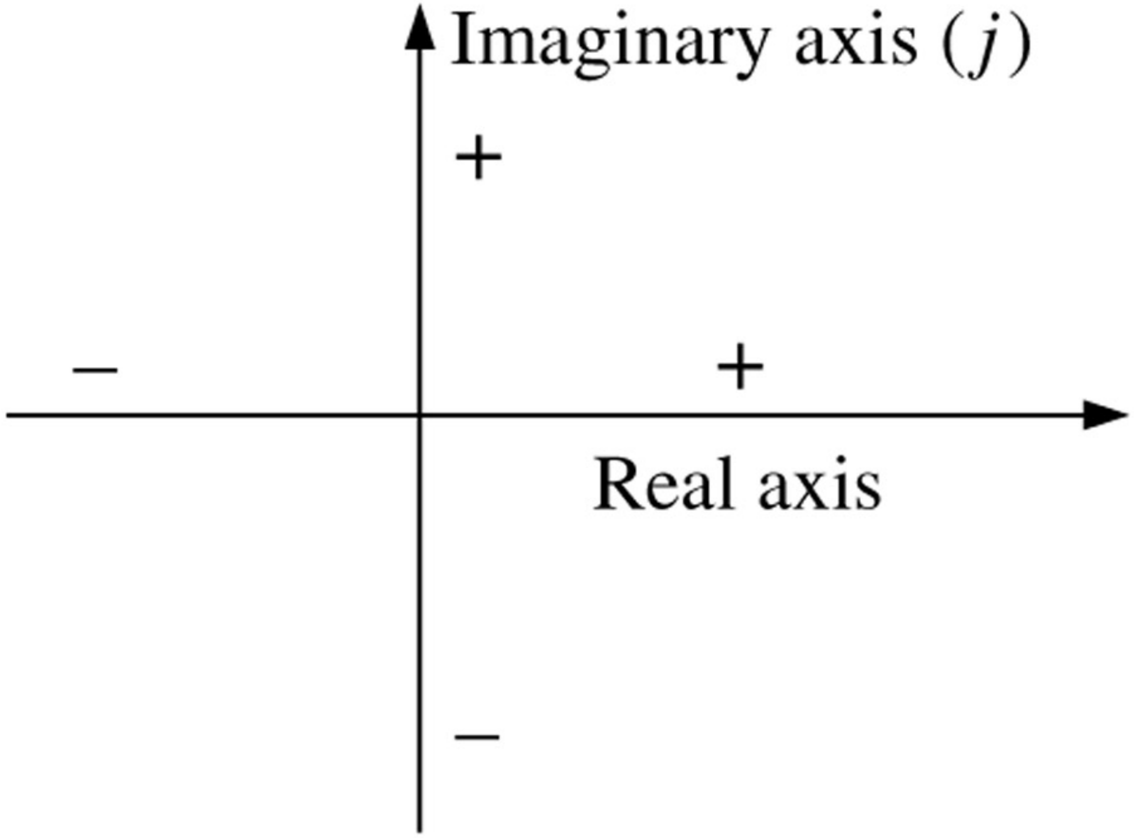
$$\theta = \theta_v - \theta_i = 0 - \left(+90^o\right) = -90^o$$

$$P = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot cos\left(-90^o\right) = 0\ W$$

A potência média ou potência dissipada por um capacitor ideal (sem resistência associada) é zero.

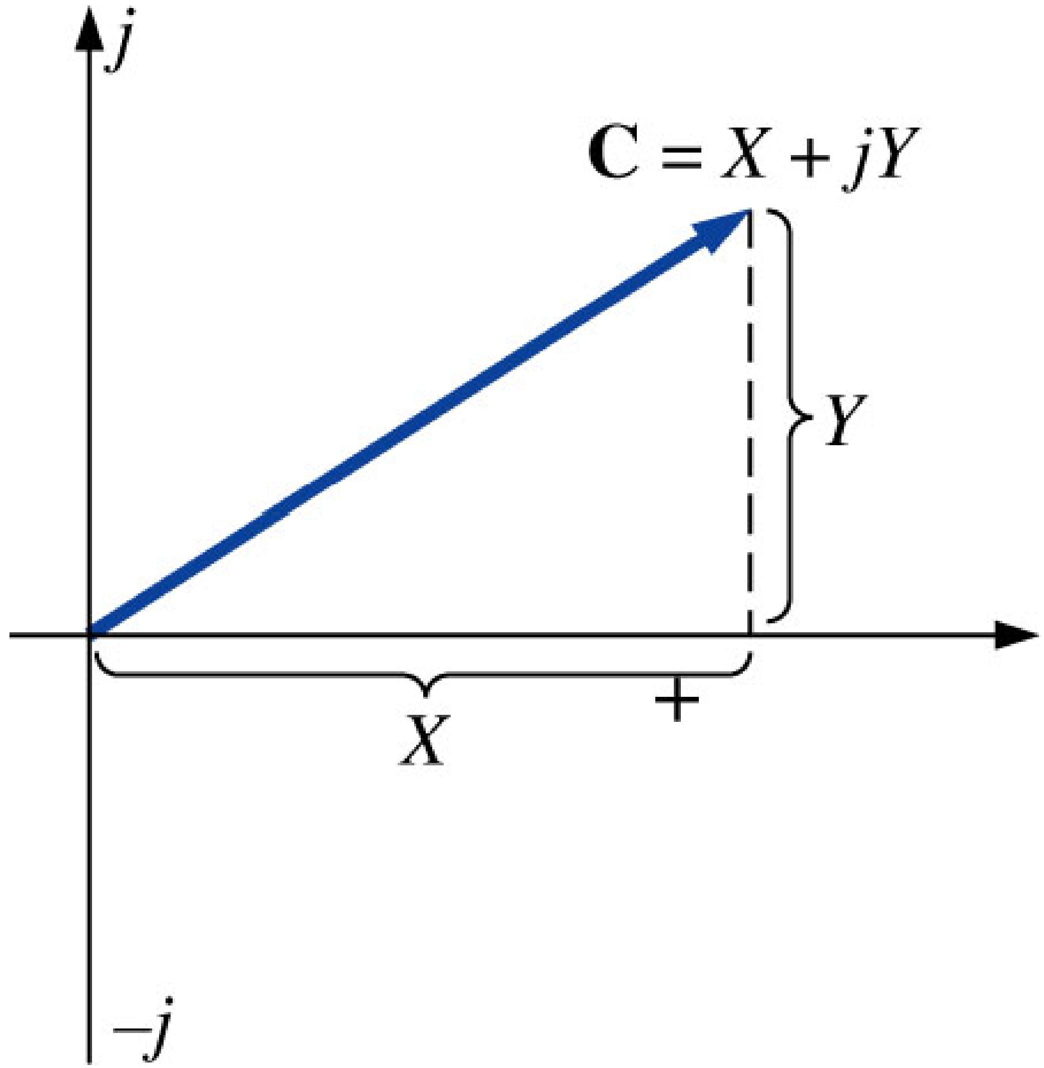
Números complexos

Um número complexo pode ser representado por um ponto num plano, referido a um sistema de eixos cartesianos.



Forma retangular

$$C = X + j \cdot Y$$



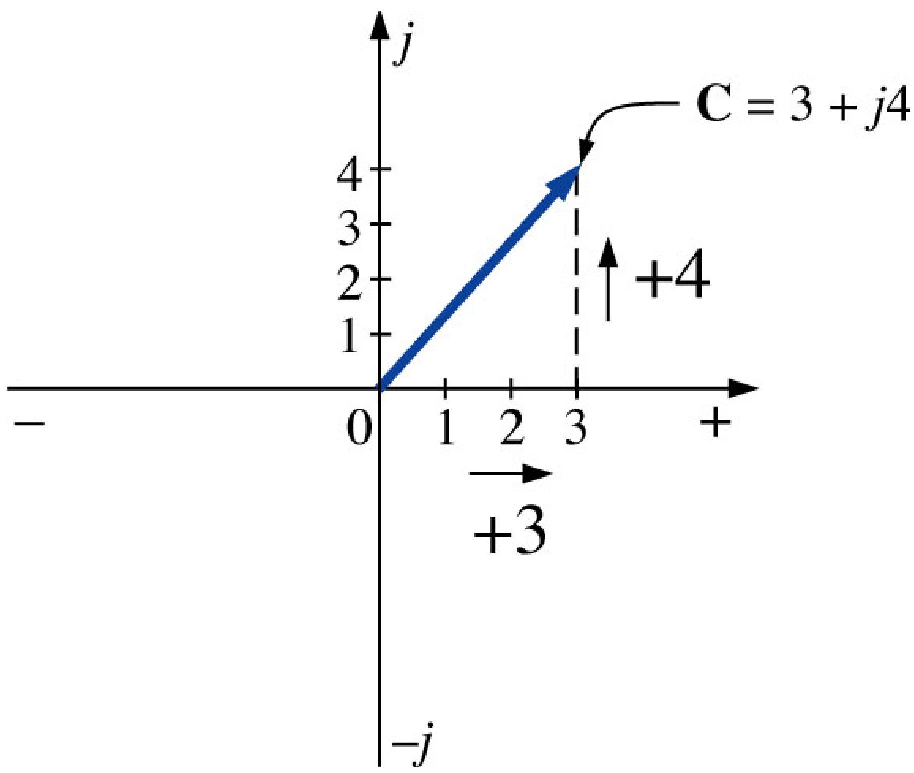
Forma retangular

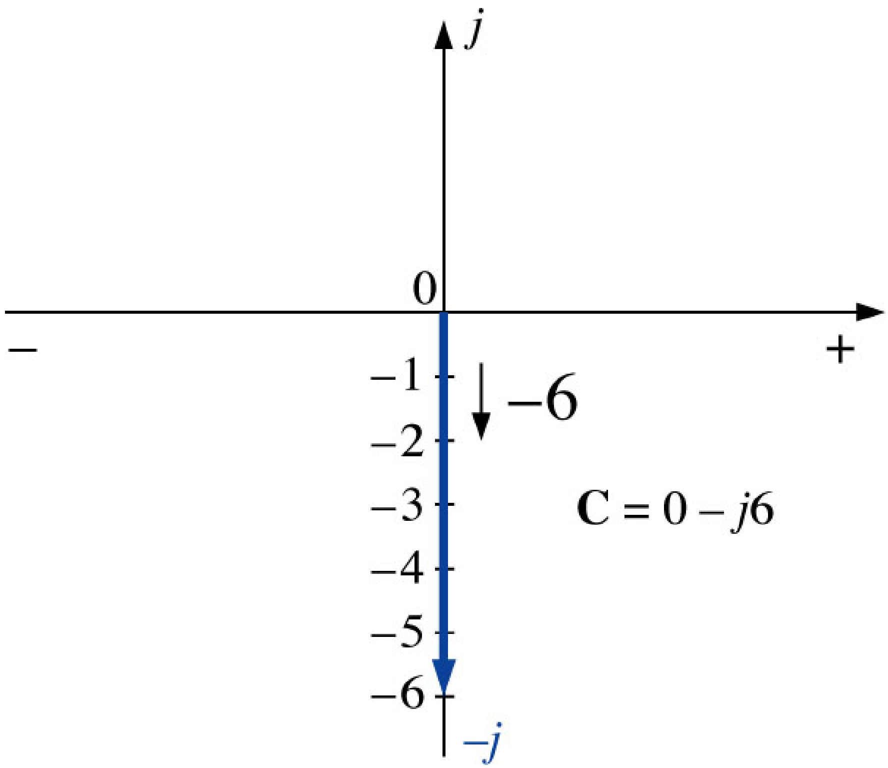
<u>Exemplo 14.13</u>: Represente os seguintes números no plano complexo:

a) $C = 3 + j4$

b) $C = 0 - j6$

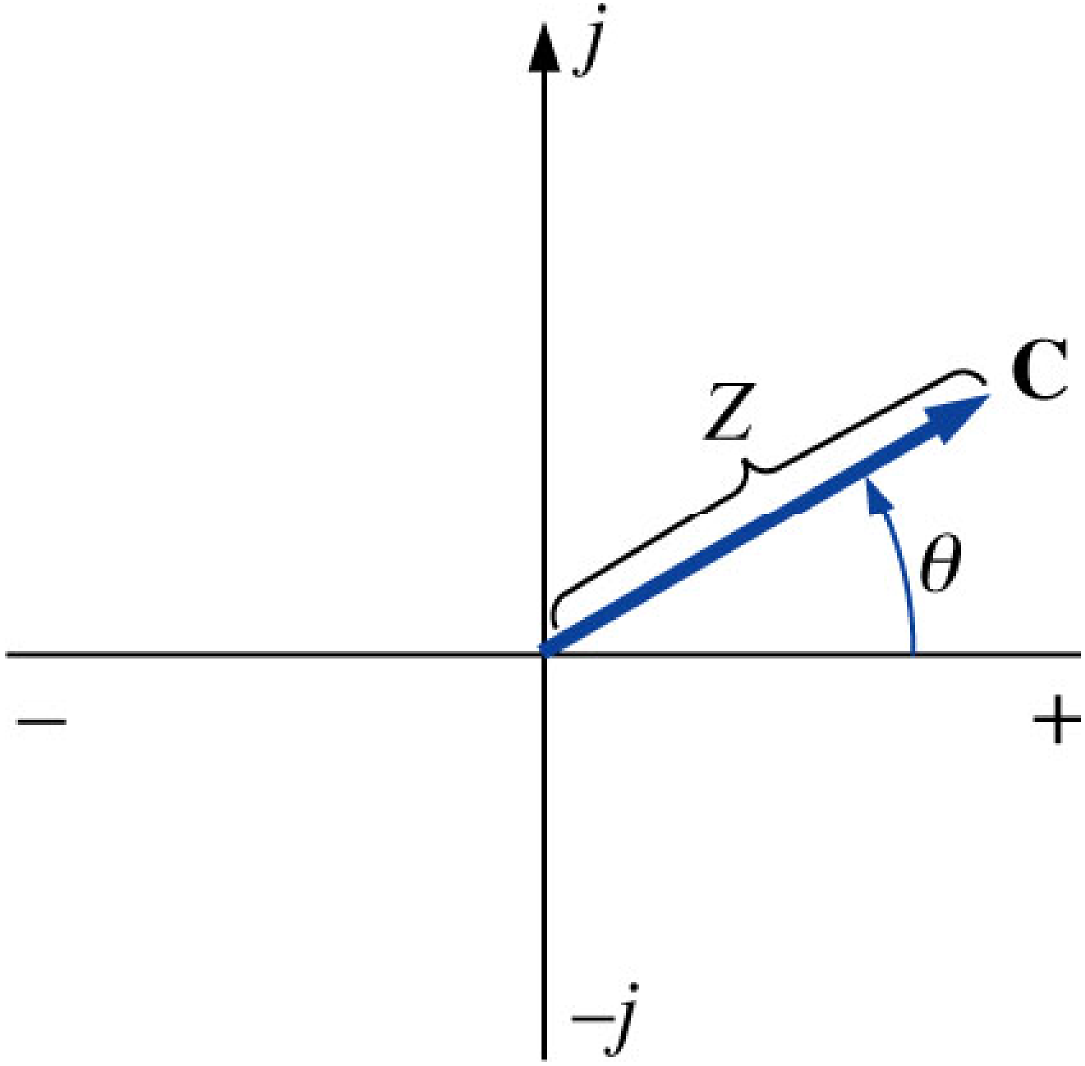
c) $C = -10 - j20$





Forma polar

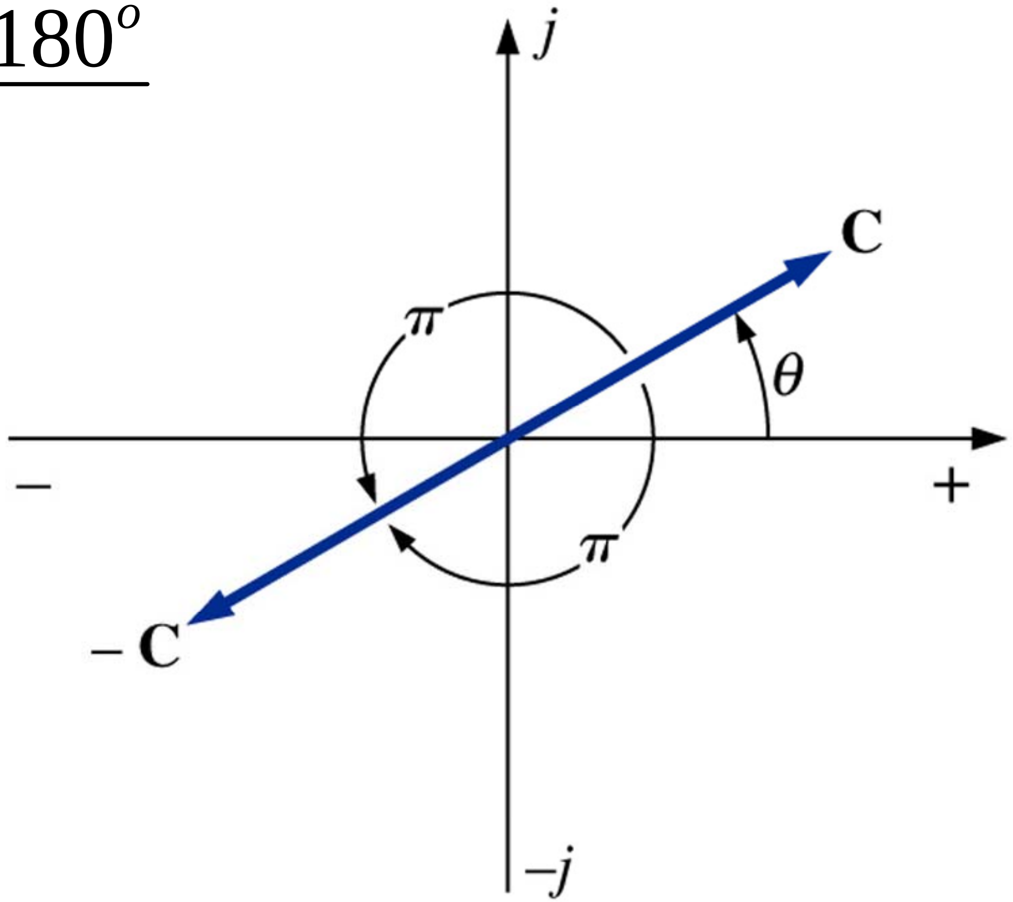
$$C = Z\angle\theta$$



Forma polar

Efeito do sinal negativo:

$$-C = -Z\underline{|\theta} = Z\underline{|\theta \pm 180^o}$$



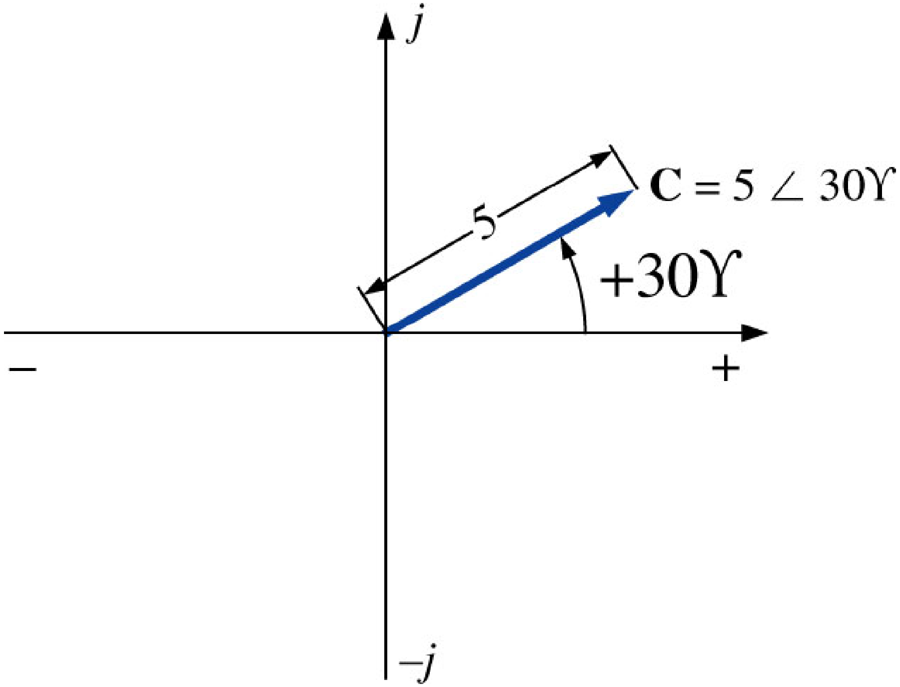
Forma polar

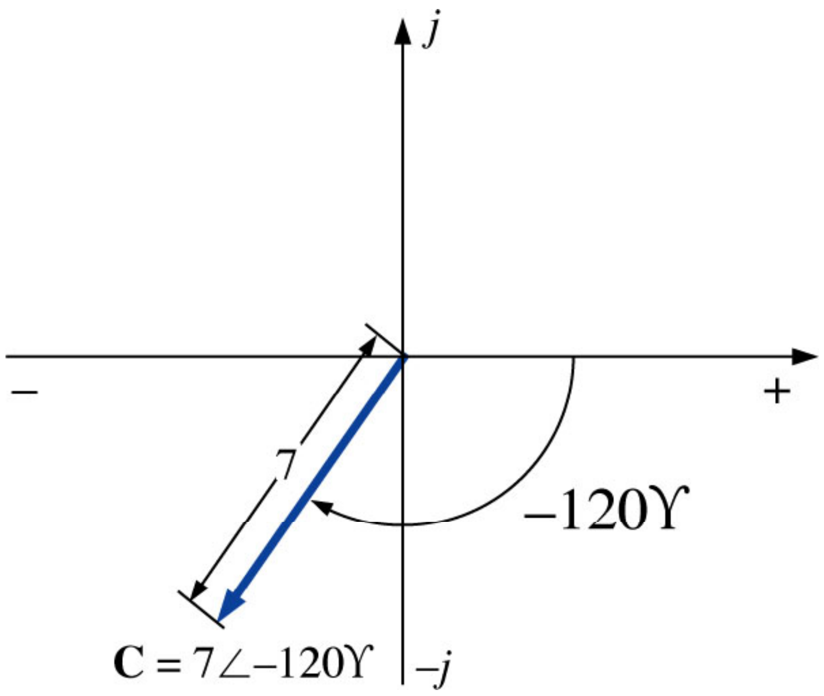
<u>Exemplo 14.14</u>: Represente os seguintes números no plano complexo:

a) $C = 5\angle 30^{o}$

b) $C = 7\angle -120^{o}$

c) $C = -4,2\angle 60^{o}$





Conversão entre formas

Retangular para polar

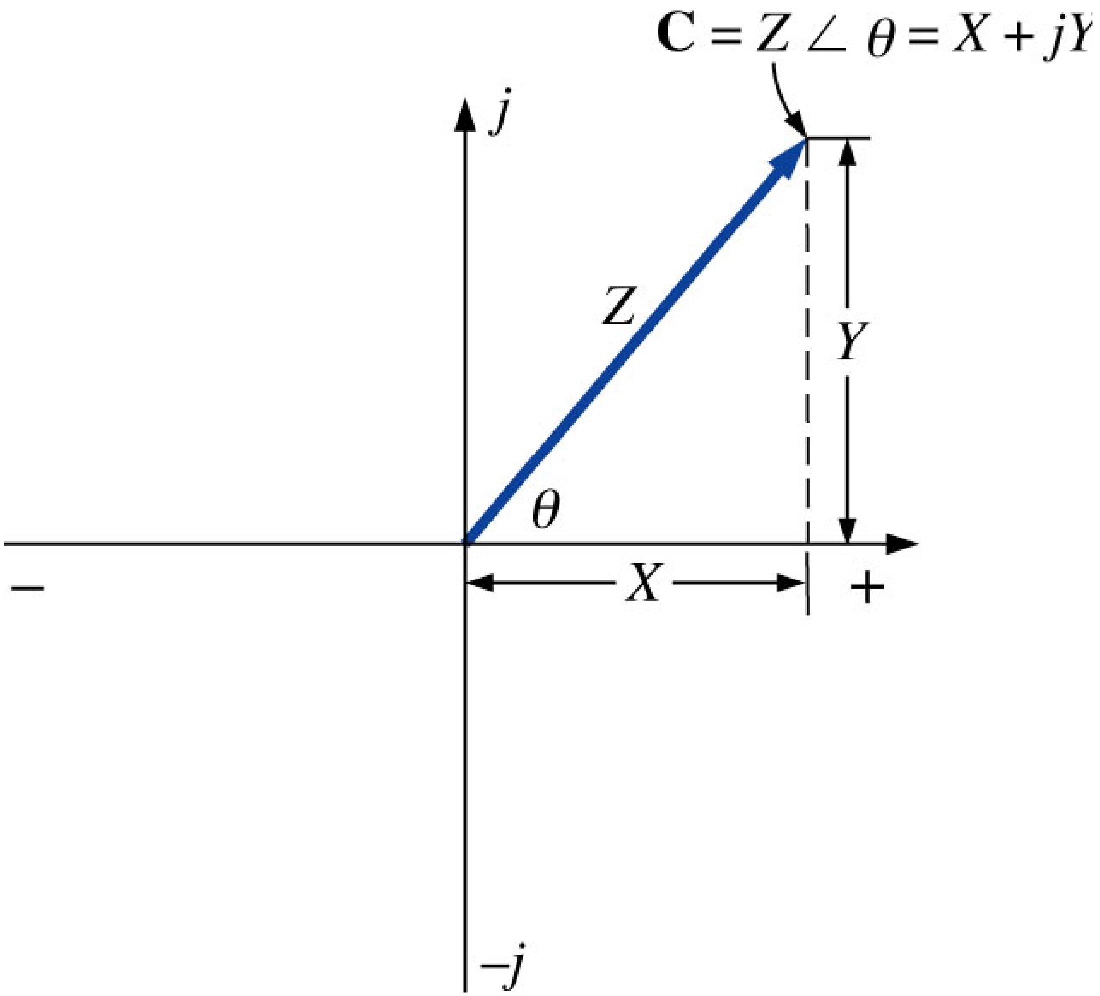
$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Polar para retangular

$$X = Z \cdot cos(\theta)$$

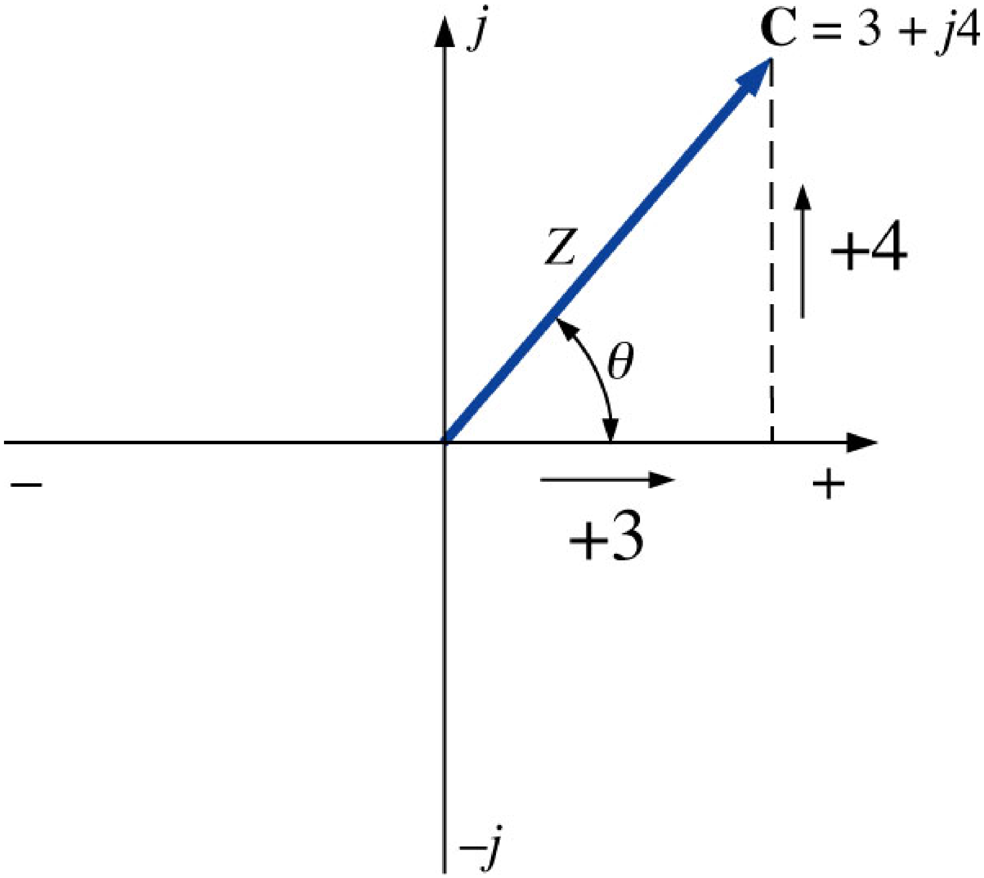
$$Y = Z \cdot sen(\theta)$$



Conversão entre formas

Exemplo 14.15: Converta o número complexo a seguir para a forma polar:

$$C = 3 + j4$$



$$Z = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}13^o$$

$$C = 5\underline{|53{,}13^o}$$

Conversão entre formas

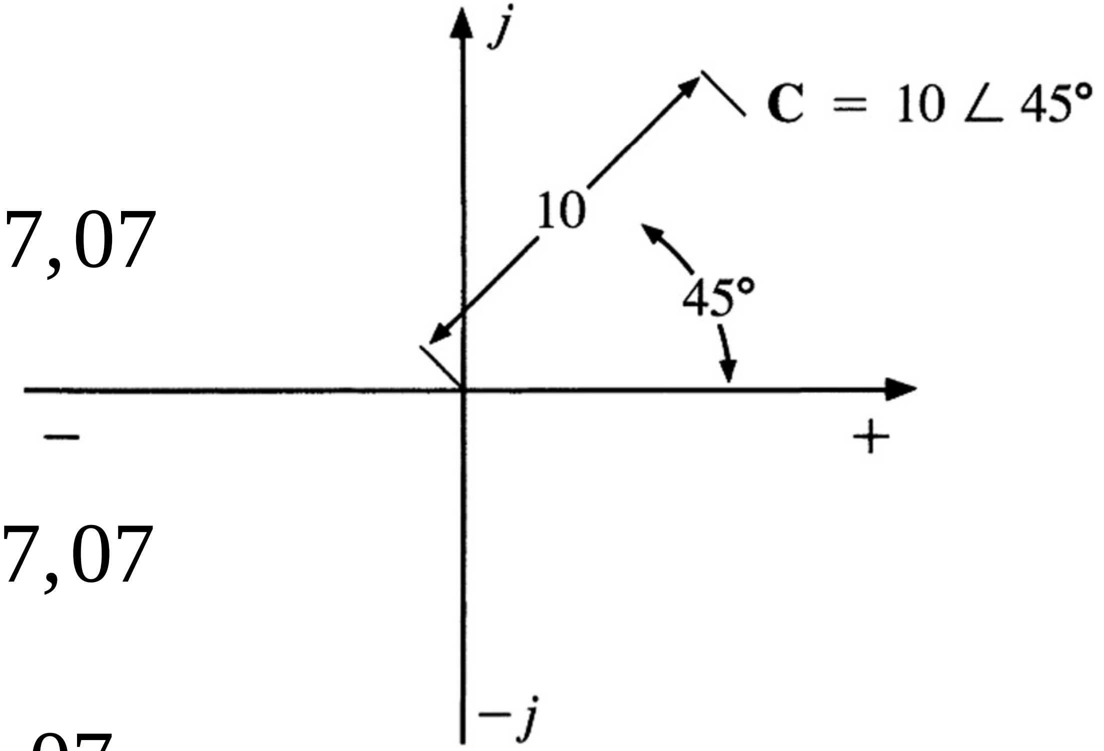
Exemplo 14.16: Converta o número complexo a seguir para a forma retangular:

$$C = 10\angle 45^o$$

$$X = 10 \cdot cos\left(45^o\right) = 7,07$$

$$Y = 10 \cdot sen\left(45^o\right) = 7,07$$

$$C = 7,07 + j7,07$$



Operações com o j

Por definição:

$$j = \sqrt{-1}$$

Daí:

$$j^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

$$\frac{1}{j} = \left(\frac{1}{j}\right) \cdot \left(\frac{j}{j}\right) = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$$

Complexo conjugado

Complexo conjugado ou conjugado, na forma retangular:

$$C = 2 + j3$$

$$C^* = 2 - j3$$

Troca de sinal

Complexo conjugado ou conjugado, na forma polar:

$$C = 2\underline{|30^o}$$

$$C^* = 2\underline{|-30^o}$$

Troca de sinal

Inverso ou recíproco

Considere o número complexo, na forma retangular:

$$C = X + jY$$

$$\frac{1}{C} = C^{-1} = \frac{1}{X + jY} = \left(X + jY\right)^{-1}$$

Considere o número complexo, na forma polar:

$$C = Z\underline{|\theta}$$

$$\frac{1}{C} = C^{-1} = \frac{1}{Z\underline{|\theta}} = \left(Z\underline{|\theta}\right)^{-1}$$

Adição de números complexos

A adição de números complexos é realizada facilmente na **forma retangular**:

$$C_1 = \pm X_1 \pm jY_1 \qquad C_2 = \pm X_2 \pm jY_2$$

$$C_1 + C_2 = \left(\pm X_1 \pm jY_1\right) + \left(\pm X_2 \pm jY_2\right)$$

$$C_1 + C_2 = \left(X_1 + X_2\right) + J\left(Y_1 + Y_2\right)$$

Exemplo 14.19: Adicione os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 2 + j4$ e $C_2 = 3 + j1$

b) $C_1 = 3 + j6$ e $C_2 = -6 + j3$

Subtração de números complexos

A subtração de números complexos é realizada facilmente na **forma retangular**:

$$C_1 = \pm X_1 \pm jY_1 \qquad C_2 = \pm X_2 \pm jY_2$$

$$C_1 - C_2 = \left(\pm X_1 \pm jY_1\right) - \left(\pm X_2 \pm jY_2\right)$$

$$C_1 - C_2 = \left(X_1 - X_2\right) + J\left(Y_1 - Y_2\right)$$

Exemplo 14.20: Subtraia os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 4 + j6$ e $C_2 = 1 + j4$

b) $C_1 = 3 + j3$ e $C_2 = -2 + j5$

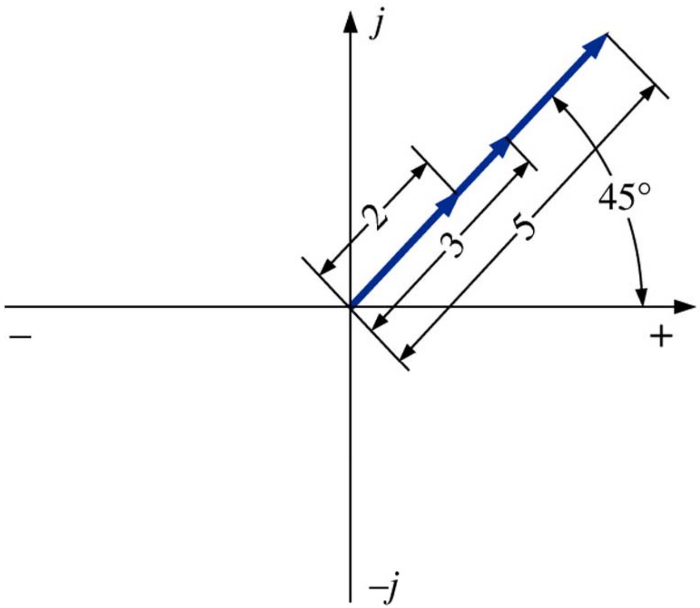
Adição e subtração de números complexos

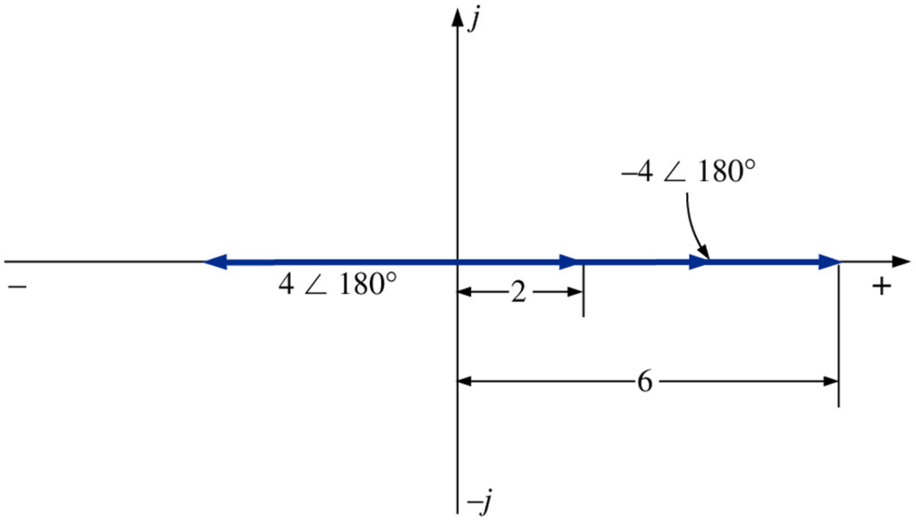
A adição e a subtração não podem ser realizadas na forma polar, a menos que os números complexos tenham o mesmo ângulo θ ou que sua diferença seja um múltiplo de 180º.

Exemplo 14.21: Adicione os seguintes números complexos:

a) $2\angle 45^o + 3\angle 45^o = 5\angle 45^o$

b) $2\angle 0^o - 4\angle 180^o = 6\angle 0^o$





Multiplicação de números complexos

A multiplicação de números complexos é realizada facilmente na **forma polar**:

$$C_1 = Z_1 \underline{|\theta_1} \qquad\qquad C_2 = Z_2 \underline{|\theta_2}$$

$$C_1 \cdot C_2 = \left(Z_1 \underline{|\theta_1} \right) \cdot \left(Z_2 \underline{|\theta_2} \right)$$

$$C_1 \cdot C_2 = Z_1 \cdot Z_1 \underline{|\theta_1 + \theta_2}$$

Exemplo 14.23: Multiplique os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 5\underline{|20^o}$ e $C_2 = 10\underline{|30^o}$

b) $C_1 = 2\underline{|-40^o}$ e $C_2 = 7\underline{|120^o}$

Divisão de números complexos

A divisão de números complexos é realizada facilmente na **forma polar**:

$$C_1 = Z_1 \angle \theta_1 \qquad C_2 = Z_2 \angle \theta_2$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{Z_1 \angle \theta_1}{Z_2 \angle \theta_2} \qquad \frac{C_1}{C_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \angle \theta_1 - \theta_2$$

Exemplo 14.25: Divida os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 15 \angle 10^o$ e $C_2 = 2 \angle 7^o$

b) $C_1 = 8 \angle 120^o$ e $C_2 = 16 \angle -50^o$

Multiplicação e divisão de números complexos

A multiplicação e a divisão podem ser realizadas com números complexos na forma retangular, mas, no caso da divisão esta operação se torna bastante trabalhosa.

Exemplo 14.22 e 14.24: Multiplique e divida os seguintes números complexos:

a) $(2+j3)\cdot(5+j10)$

b) $(-2-j3)\cdot(4-j6)$

a) $(1+j4)/(4+j5)$

b) $(-4-j8)/(6-j1)$

$$C_1 = X_1 + jY_1 \quad \text{e} \quad C_2 = X_2 + jY_2$$

$$C_1 = X_1 + jY_1 \quad \text{e} \quad C_2 = X_2 + jY_2$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1}{C_2}\cdot\frac{C_2^*}{C_2^*} = \frac{(X_1 + jY)\cdot(X_2 - jY_2)}{(X_2 + jY_2)\cdot(X_2 - jY_2)}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{(X_1X_2 + Y_1Y_2) + j(X_2Y_1 - X_1Y_1)}{X_2^{\,2} + Y_2^{\,2}}$$

Na próxima aula

Capítulo 14: Os Dispositivos Básicos e os Fasores

1. Fasores.