

Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina
Departamento Acadêmico de Eletrônica
Retificadores



Números Complexos, Conversão de Formas e Operações Matemáticas



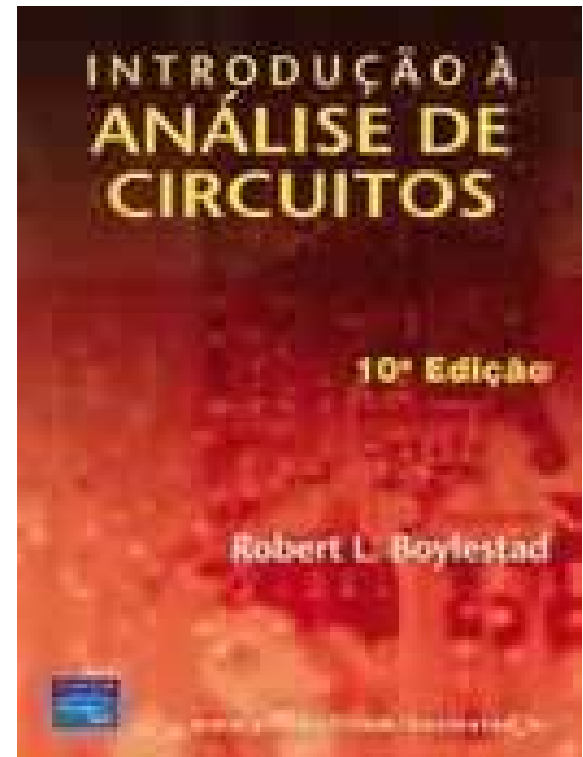
Prof. Clóvis Antônio Petry.

Florianópolis, agosto de 2008.

Bibliografia para esta aula

Capítulo 14: Os Dispositivos Básicos e os Fasores

1. Números complexos;
2. Operações com números complexos.



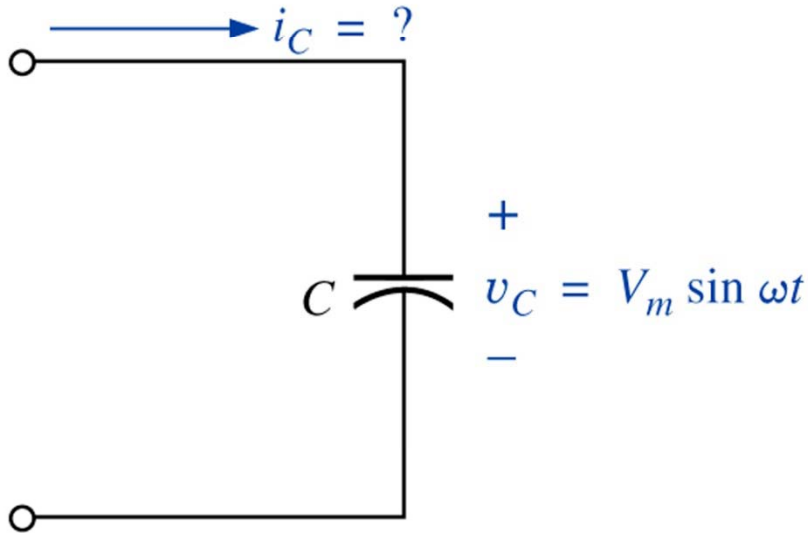
Nesta aula

Seqüência de conteúdos:

1. Revisão;
2. Números complexos;
3. Forma retangular;
4. Forma polar;
5. Conversão de formas;
6. Complexo conjugado;
7. Inverso;
8. Adição e subtração;
9. Multiplicação e divisão.

Resposta do capacitor em CA

Revisão



Para uma dada tensão:

$$v_C(t) = V_m \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$i_C(t) = C \frac{d(v_C(t))}{dt}$$

$$i_C(t) = C \frac{d(V_m \cdot \text{sen}(\omega t))}{dt}$$

$$i_C(t) = \omega \cdot C \cdot V_m \cdot \text{cos}(\omega t)$$

$$I_m = \omega \cdot C \cdot V_m$$

$$i_C(t) = I_m \cdot \text{sen}(\omega t + 90^\circ)$$

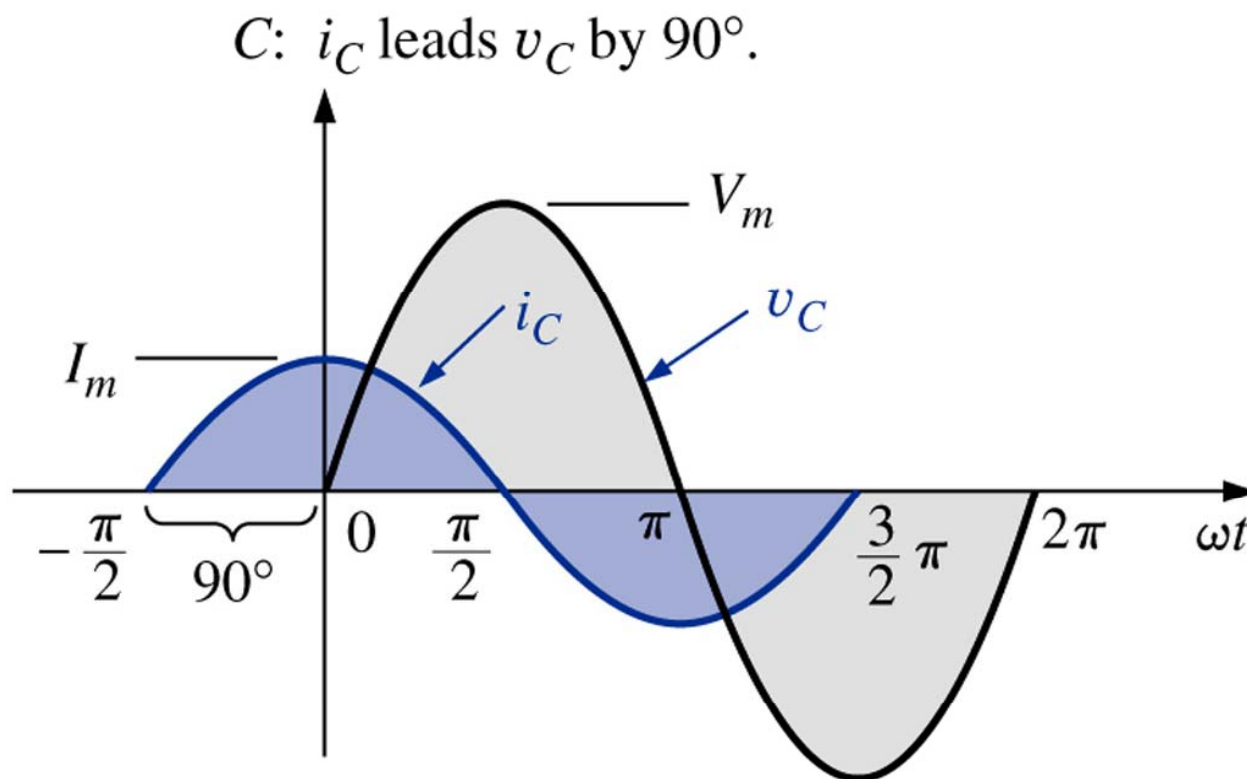
$$i_C(t) = C \frac{d(v_C(t))}{dt}$$

Relação $v \times i$ no capacitor

Resposta do capacitor em CA

Revisão

Para um capacitor, i_C está adiantada 90° em relação a v_C . Em outras palavras, v_C está atrasada 90° em relação a i_C .



Comportamento de R, L e C com a frequência *Revisão*

R

Resistor

$$X_L = \omega \cdot L$$

Indutor

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Capacitor

Frequência

Elemento

$$f \Rightarrow 0 \text{ Hz}$$

R

$$X_L = 2\pi \cdot 0 = 0 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi \cdot 0 \cdot C} = \frac{1}{0} = \infty \Omega$$

$$f \Rightarrow \infty \text{ Hz}$$

R

$$X_L = 2\pi \cdot \infty = \infty \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi \cdot \infty \cdot C} = \frac{1}{\infty} = 0 \Omega$$

Potência média em CA

Revisão

Considerando que em determinado elemento se tenha:

$$v(t) = V_m \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_v) \quad i(t) = I_m \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_i)$$

A potência será:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_m \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_v) \cdot I_m \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_i)$$

$$p(t) = V_m \cdot I_m \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_v) \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_i)$$

Após usar identidades trigonométricas e algumas manipulações:

$$p(t) = \left[\frac{V_m I_m}{2} \cdot \cos(\theta_v - \theta_i) \right] - \left[\frac{V_m I_m}{2} \cdot \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) \right]$$

Valor fixo

Valor que varia no tempo

Potência média em CA

Revisão

No resistor:

$$\theta = \theta_v - \theta_i = 0^\circ \quad \text{Defasagem entre tensão e corrente}$$

$$P = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos(0) = V_{ef} \cdot I_{ef} = \frac{V_m I_m}{2}$$

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{R} \quad P = V_{ef} \cdot I_{ef} = V_{ef} \cdot \frac{V_{ef}}{R} = \frac{V_{ef}^2}{R}$$

$$V_{ef} = R \cdot I_{ef} \quad P = V_{ef} \cdot I_{ef} = R \cdot I_{ef} \cdot I_{ef} = R \cdot I_{ef}^2$$

Potência média em CA

Revisão

No indutor:

Defasagem entre tensão e corrente

$$\theta = \theta_v - \theta_i = 0 - (-90^\circ) = 90^\circ$$

$$P = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos(90^\circ) = 0 \text{ W}$$

A potência média ou potência dissipada por um indutor ideal (sem resistência associada) é zero.

Potência média em CA

Revisão

No capacitor:

Defasagem entre tensão e corrente

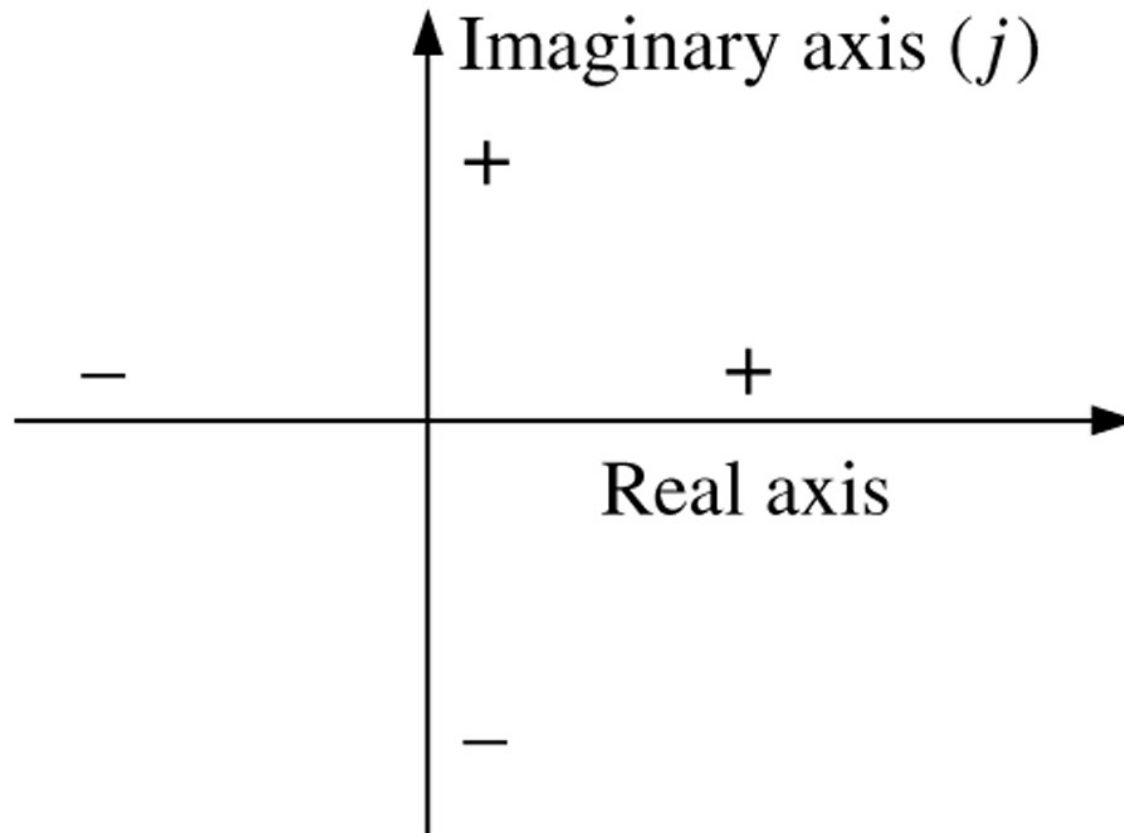
$$\theta = \theta_v - \theta_i = 0 - (+90^\circ) = -90^\circ$$

$$P = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos(-90^\circ) = 0 \text{ W}$$

A potência média ou potência dissipada por um capacitor ideal (sem resistência associada) é zero.

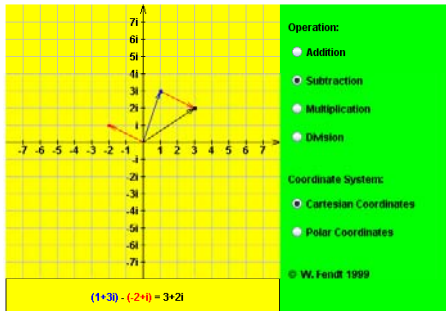
Números complexos

Um número complexo pode ser representado por um ponto num plano, referido a um sistema de eixos cartesianos.

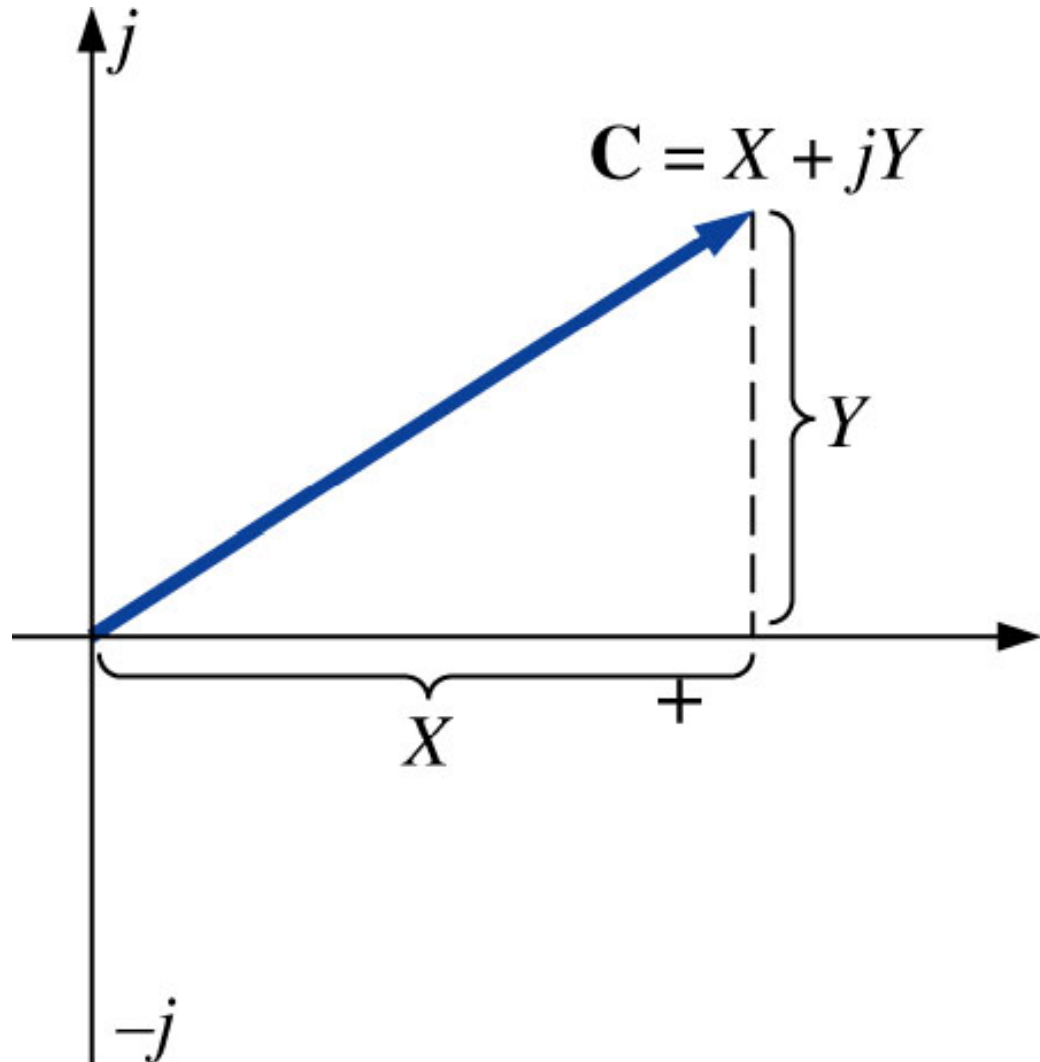
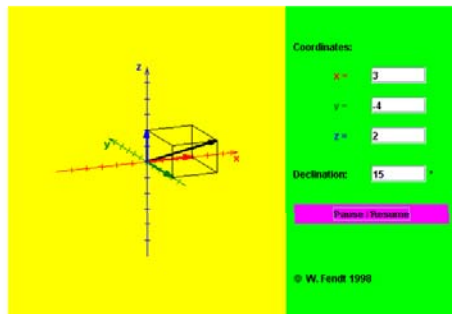


Forma retangular

$$C = X + j \cdot Y$$



Applets



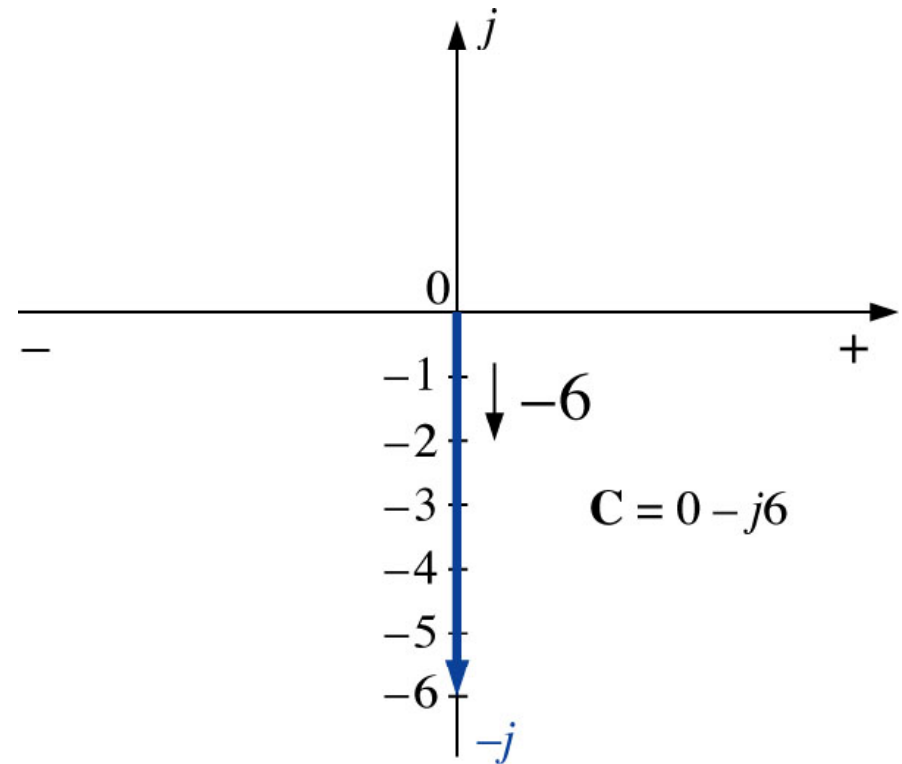
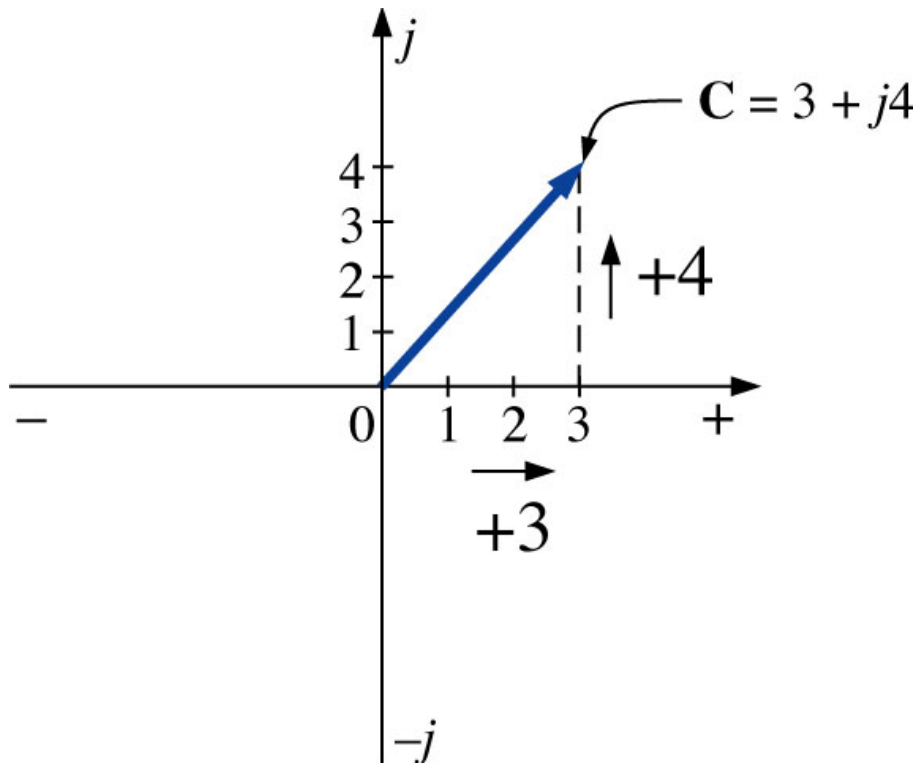
Forma retangular

Exemplo 14.13: Represente os seguintes números no plano complexo:

a) $C = 3 + j4$

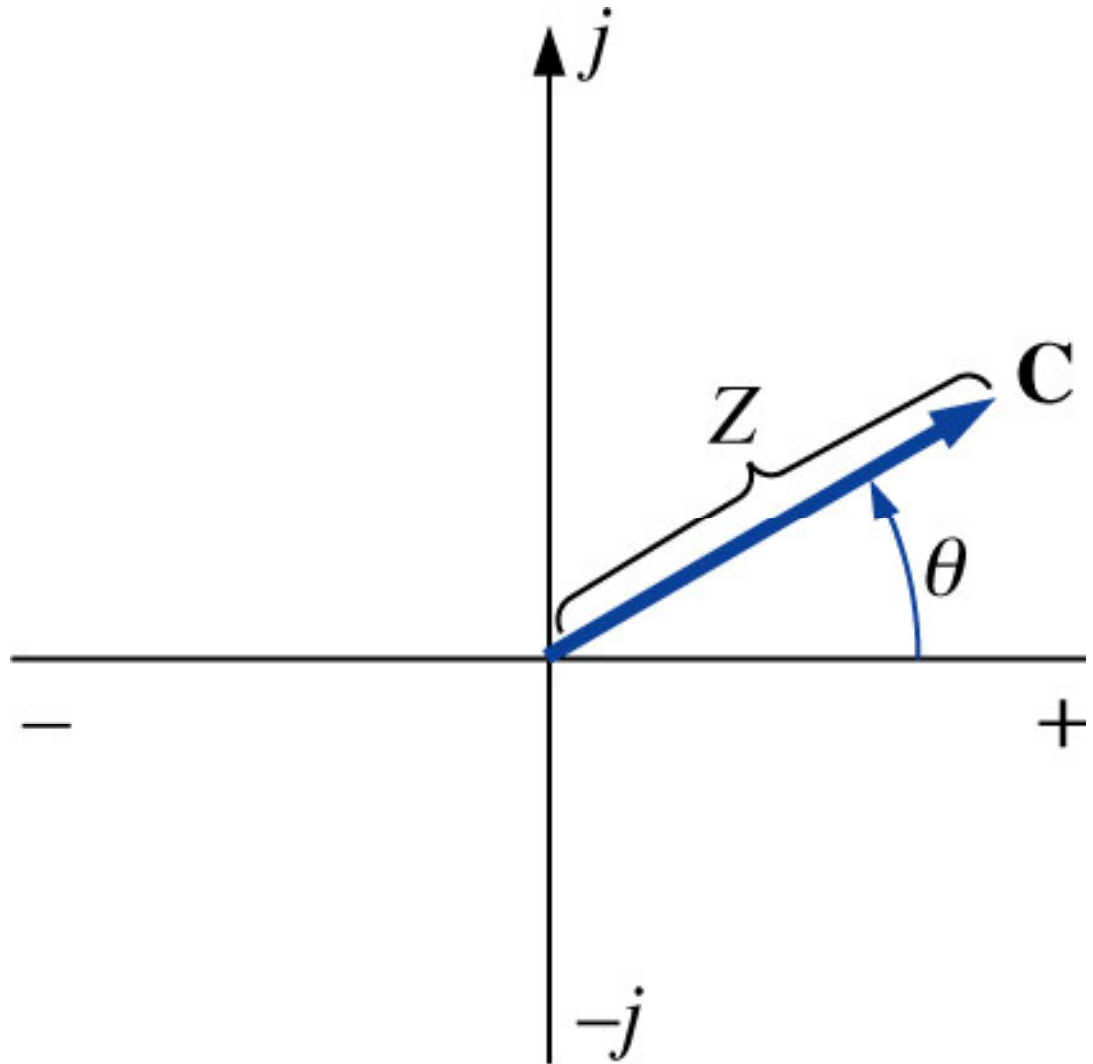
b) $C = 0 - j6$

c) $C = -10 - j20$



Forma polar

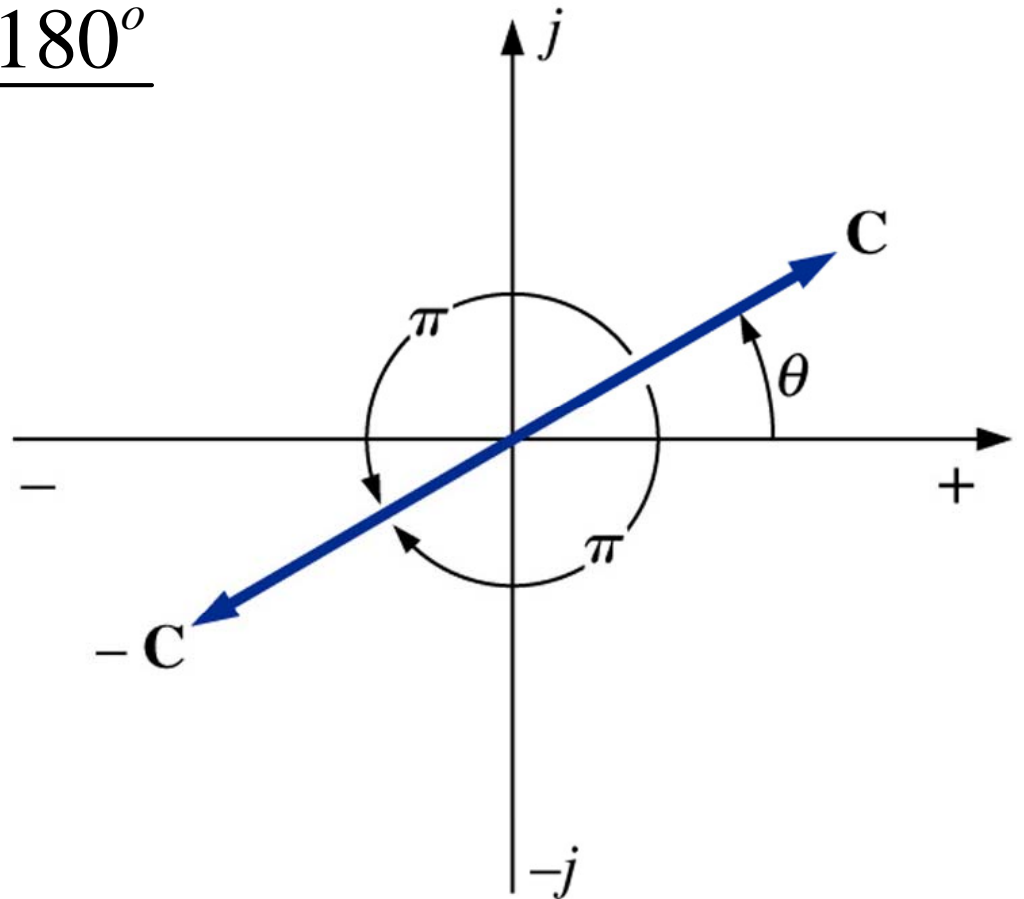
$$C = Z \angle \theta$$



Forma polar

Efeito do sinal negativo:

$$-C = -Z|\theta = Z|\theta \pm 180^\circ$$



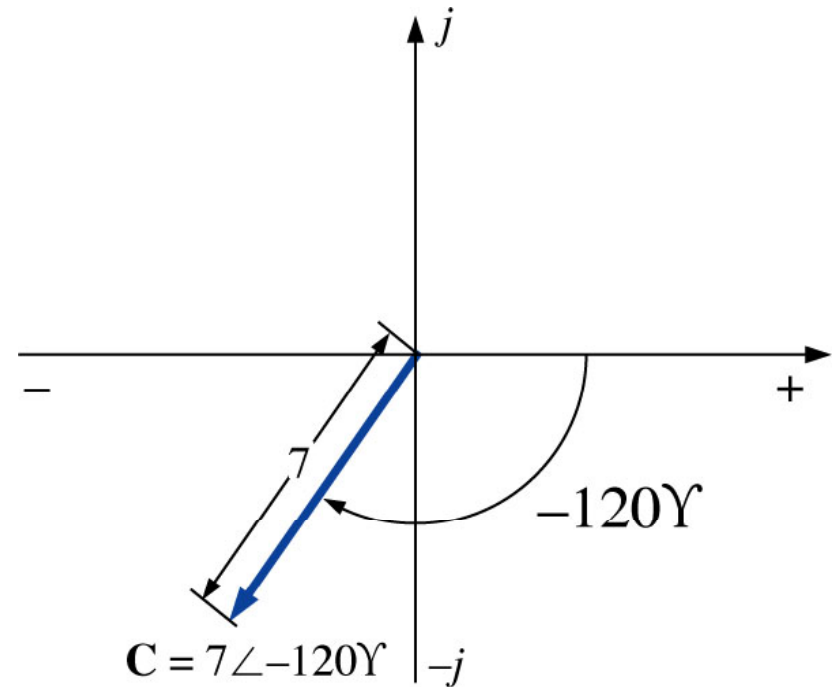
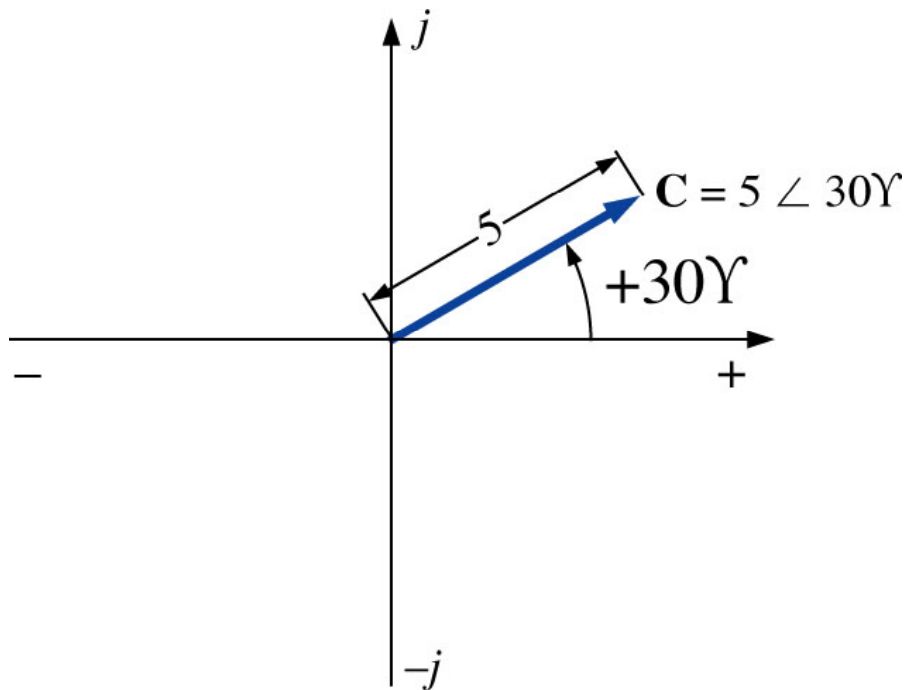
Forma polar

Exemplo 14.14: Represente os seguintes números no plano complexo:

a) $C = 5 \angle 30^\circ$

b) $C = 7 \angle -120^\circ$

c) $C = -4,2 \angle 60^\circ$



Conversão entre formas

Retangular para polar

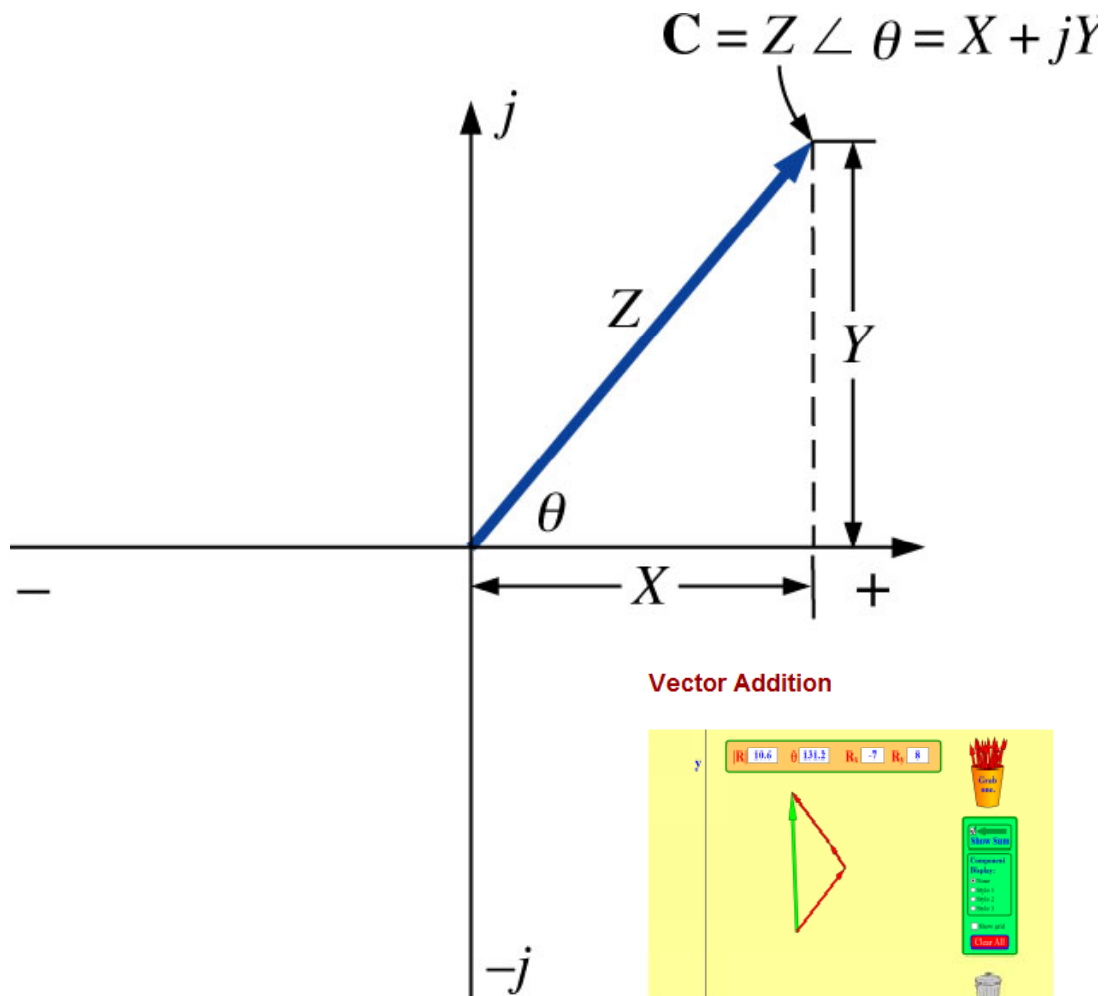
$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right)$$

Polar para retangular

$$X = Z \cdot \cos(\theta)$$

$$Y = Z \cdot \text{sen}(\theta)$$



Conversão entre formas

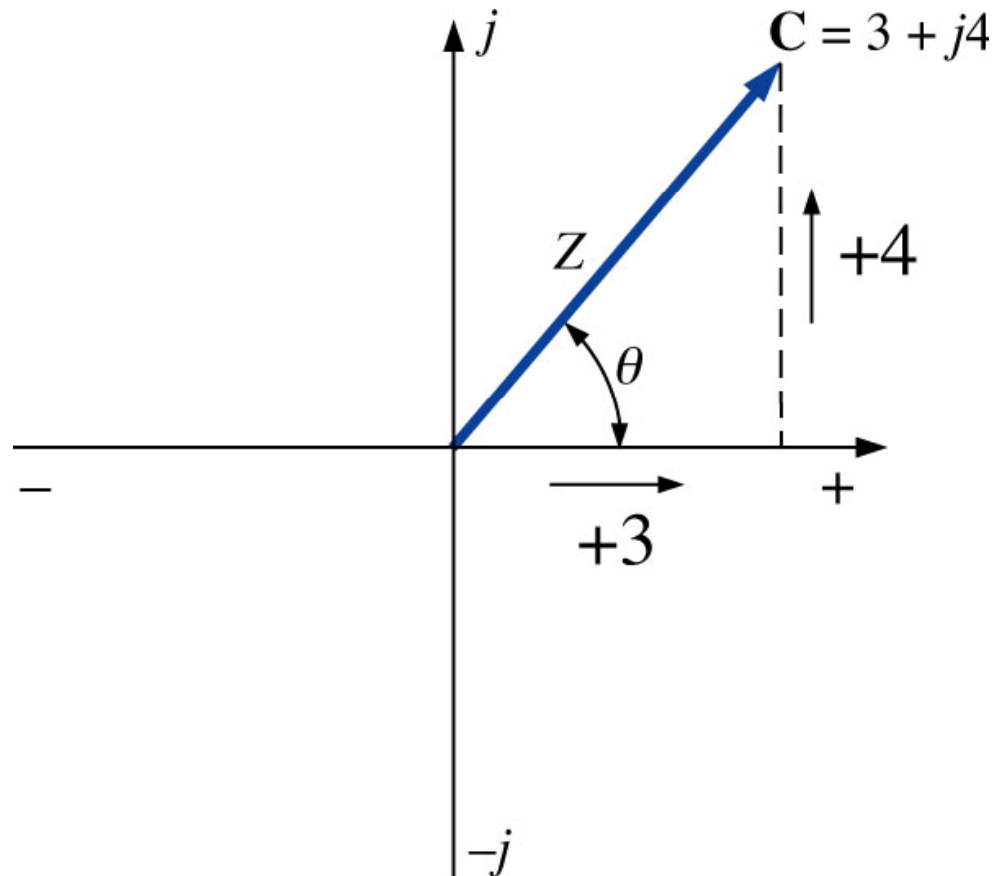
Exemplo 14.15: Converta o número complexo a seguir para a forma polar:

$$C = 3 + j4$$

$$Z = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53,13^\circ$$

$$C = 5 \underline{\underline{|53,13^\circ}}$$



Conversão entre formas

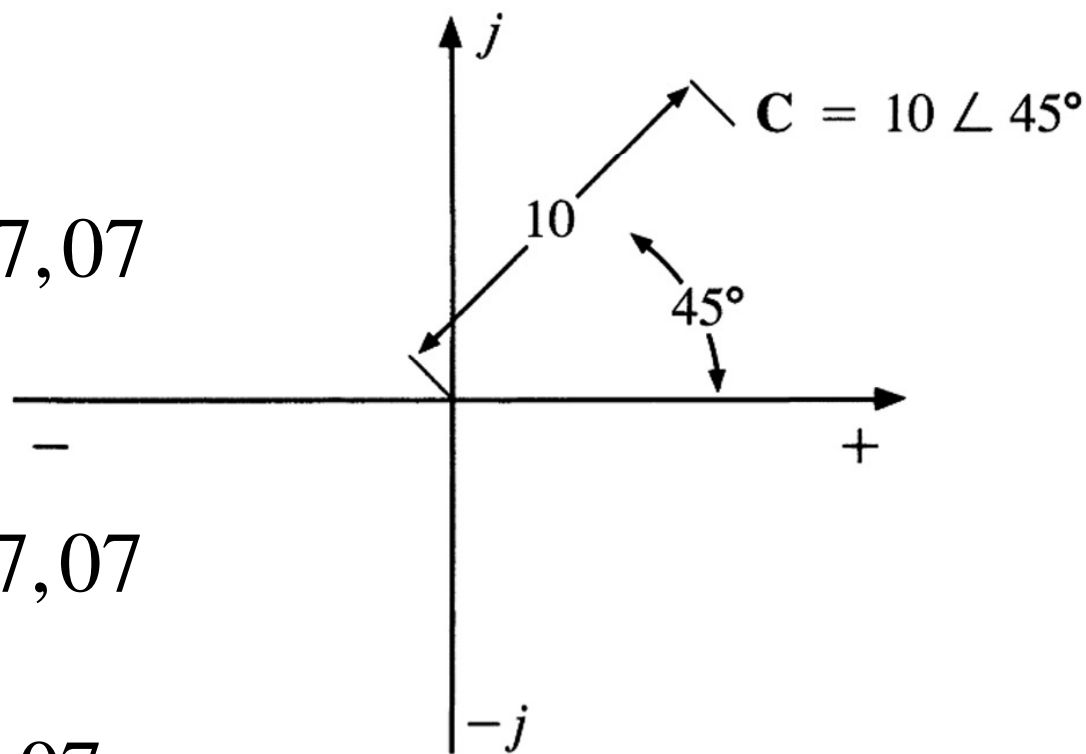
Exemplo 14.16: Converta o número complexo a seguir para a forma retangular:

$$C = 10 \angle 45^\circ$$

$$X = 10 \cdot \cos(45^\circ) = 7,07$$

$$Y = 10 \cdot \text{sen}(45^\circ) = 7,07$$

$$C = 7,07 + j7,07$$



Operações com o j

Por definição:

$$j = \sqrt{-1}$$

Daí:

$$j^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

$$\frac{1}{j} = \left(\frac{1}{j}\right) \cdot \left(\frac{j}{j}\right) = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$$

Complexo conjugado

Complexo conjugado ou conjugado, na forma retangular:

$$C = 2 + j3$$

$$C^* = 2 - j3$$



Troca de sinal

Complexo conjugado ou conjugado, na forma polar:

$$C = 2 \angle 30^\circ$$

$$C^* = 2 \angle -30^\circ$$



Troca de sinal

Inverso ou recíproco

Considere o número complexo, na forma retangular:

$$C = X + jY$$

$$\frac{1}{C} = C^{-1} = \frac{1}{X + jY} = (X + jY)^{-1}$$

Considere o número complexo, na forma polar:

$$C = Z \underline{\theta}$$

$$\frac{1}{C} = C^{-1} = \frac{1}{Z \underline{\theta}} = (Z \underline{\theta})^{-1}$$

Adição de números complexos

A adição de números complexos é realizada facilmente na forma retangular:

$$C_1 = \pm X_1 \pm jY_1 \quad C_2 = \pm X_2 \pm jY_2$$

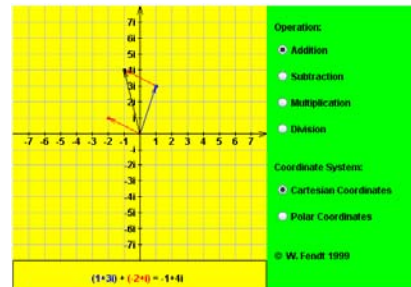
$$C_1 + C_2 = (\pm X_1 \pm jY_1) + (\pm X_2 \pm jY_2)$$

$$C_1 + C_2 = (X_1 + X_2) + J(Y_1 + Y_2)$$

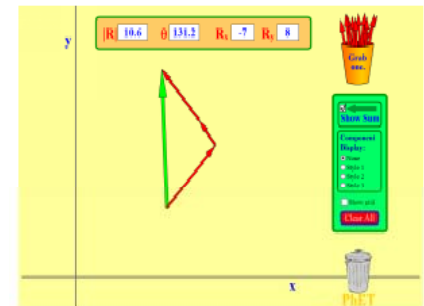
Exemplo 14.19: Adicione os seguintes números complexos: <http://phet.colorado.edu>

a) $C_1 = 2 + j4$ e $C_2 = 3 + j1$

b) $C_1 = 3 + j6$ e $C_2 = -6 + j3$



Vector Addition



<http://www.walter-fendt.de/ph11br/>

Subtração de números complexos

A subtração de números complexos é realizada facilmente na forma retangular:

$$C_1 = \pm X_1 \pm jY_1 \quad C_2 = \pm X_2 \pm jY_2$$

$$C_1 - C_2 = (\pm X_1 \pm jY_1) - (\pm X_2 \pm jY_2)$$

$$C_1 - C_2 = (X_1 - X_2) + J(Y_1 - Y_2)$$

Exemplo 14.20: Subtraia os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 4 + j6$ e $C_2 = 1 + j4$

b) $C_1 = 3 + j3$ e $C_2 = -2 + j5$

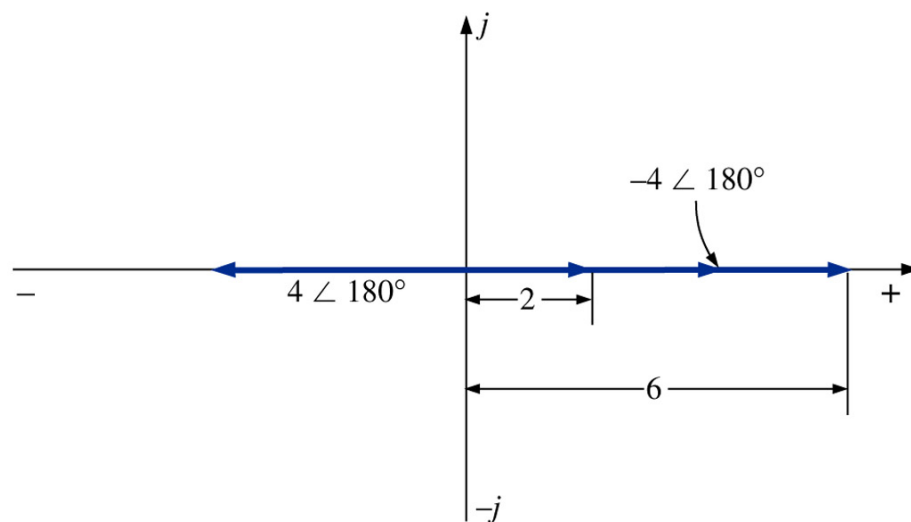
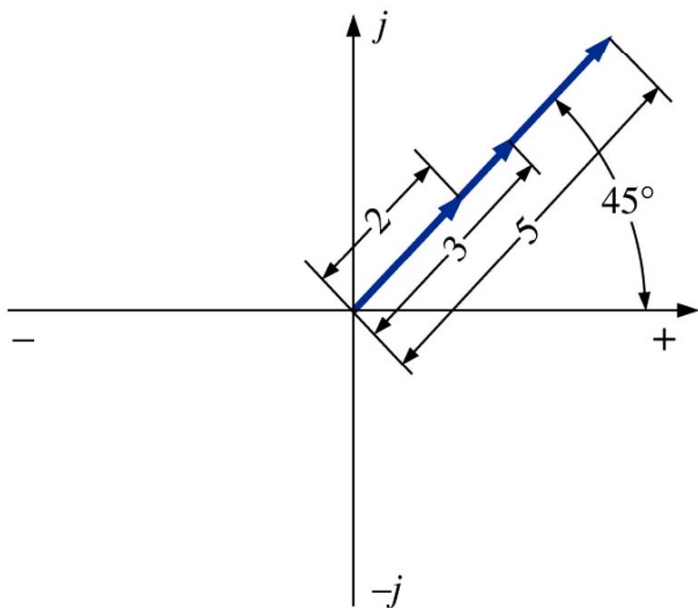
Adição e subtração de números complexos

A adição e a subtração não podem ser realizadas na forma polar, a menos que os números complexos tenham o mesmo ângulo θ ou que sua diferença seja um múltiplo de 180° .

Exemplo 14.21: Adicione os seguintes números complexos:

$$\text{a) } 2\angle 45^\circ + 3\angle 45^\circ = 5\angle 45^\circ$$

$$\text{b) } 2\angle 0^\circ - 4\angle 180^\circ = 6\angle 0^\circ$$



Multiplicação de números complexos

A multiplicação de números complexos é realizada facilmente na **forma polar**:

$$C_1 = Z_1 \underline{|\theta_1} \qquad C_2 = Z_2 \underline{|\theta_2}$$

$$C_1 \cdot C_2 = \left(Z_1 \underline{|\theta_1} \right) \cdot \left(Z_2 \underline{|\theta_2} \right)$$

$$C_1 \cdot C_2 = Z_1 \cdot Z_2 \underline{|\theta_1 + \theta_2}$$

Exemplo 14.23: Multiplique os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 5 \underline{|\ 20^\circ}$ e $C_2 = 10 \underline{|\ 30^\circ}$

b) $C_1 = 2 \underline{|\ -40^\circ}$ e $C_2 = 7 \underline{|\ 120^\circ}$

Divisão de números complexos

A divisão de números complexos é realizada facilmente na **forma polar**:

$$C_1 = Z_1 \angle \theta_1$$

$$C_2 = Z_2 \angle \theta_2$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{Z_1 \angle \theta_1}{Z_2 \angle \theta_2}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \angle \theta_1 - \theta_2$$

Exemplo 14.25: Divida os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 15 \angle 10^\circ$ e $C_2 = 2 \angle 7^\circ$

b) $C_1 = 8 \angle 120^\circ$ e $C_2 = 16 \angle -50^\circ$

Multiplicação e divisão de números complexos

A multiplicação e a divisão podem ser realizadas com números complexos na forma retangular, mas, no caso da divisão esta operação se torna bastante trabalhosa.

Exemplo 14.22 e 14.24: Multiplique e divida os seguintes números complexos:

a) $(2 + j3) \cdot (5 + j10)$

a) $(1 + j4) / (4 + j5)$

b) $(-2 - j3) \cdot (4 - j6)$

b) $(-4 - j8) / (6 - j1)$

$$C_1 = X_1 + jY_1 \quad \text{e} \quad C_2 = X_2 + jY_2$$

$$C_1 = X_1 + jY_1 \quad \text{e} \quad C_2 = X_2 + jY_2$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{C_2^*}{C_2^*} = \frac{(X_1 + jY_1) \cdot (X_2 - jY_2)}{(X_2 + jY_2) \cdot (X_2 - jY_2)}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{(X_1X_2 + Y_1Y_2) + j(X_2Y_1 - X_1Y_2)}{X_2^2 + Y_2^2}$$

Na próxima aula

Capítulo 14: Os Dispositivos Básicos e os Fasores

1. Fasores.

