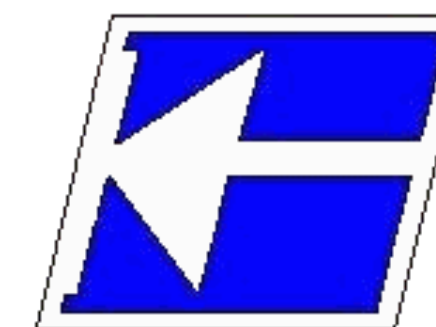




Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina  
Departamento Acadêmico de Eletrônica  
Circuitos Elétricos I



# Análise dos Nós

Prof. Clovis Antonio Petry.

Florianópolis, setembro de 2020.

# Curso Básico de Circuitos Elétricos I

O material do curso está disponível em:

1. Moodle para os alunos matriculados na disciplina.
2. Página do professor.
3. Canal no youtube do professor.



<https://moodle.ifsc.edu.br>



[www.ProfessorPetry.com.br](http://www.ProfessorPetry.com.br)



<https://www.youtube.com>

# Agenda

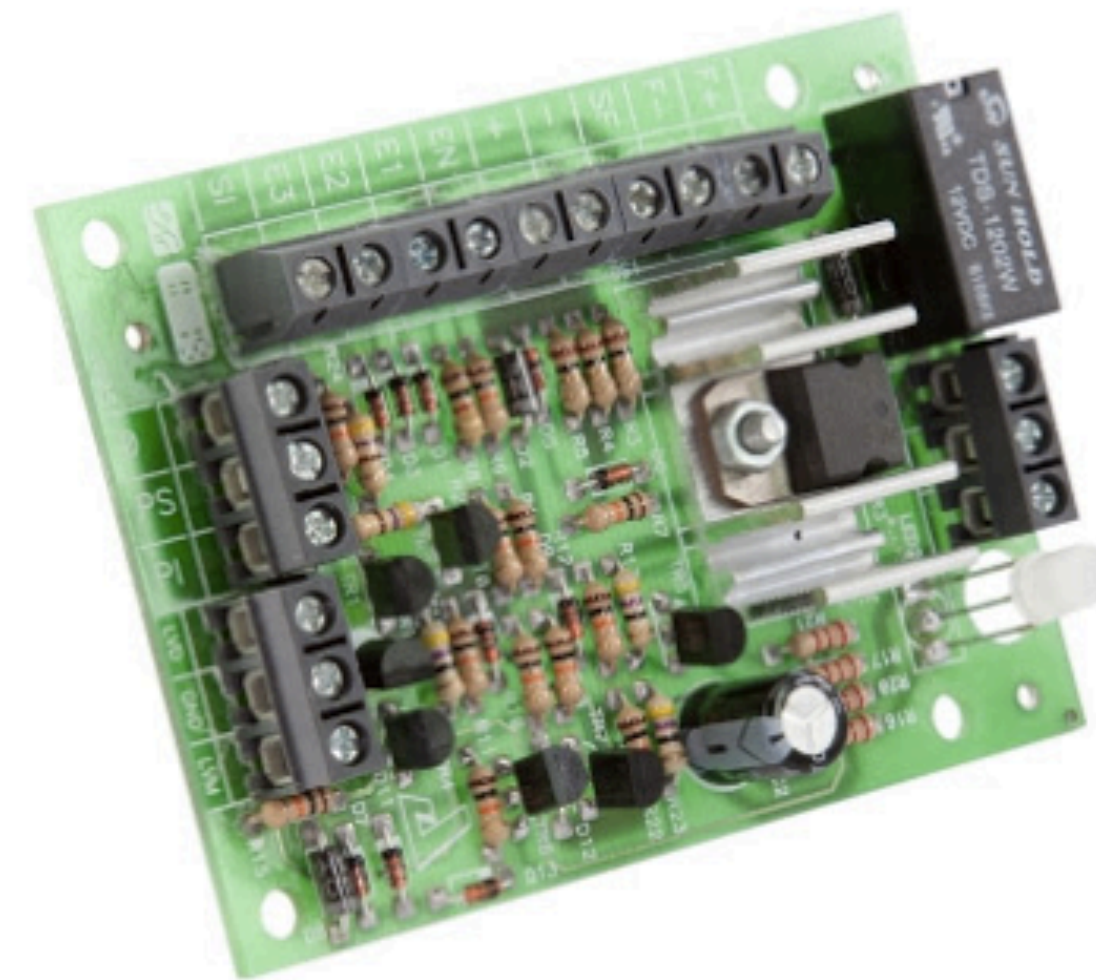
Esta aula está organizada em:

1. Análise dos nós:
  - explicações e conceitos;
  - exemplos de aplicação.



## Motivação

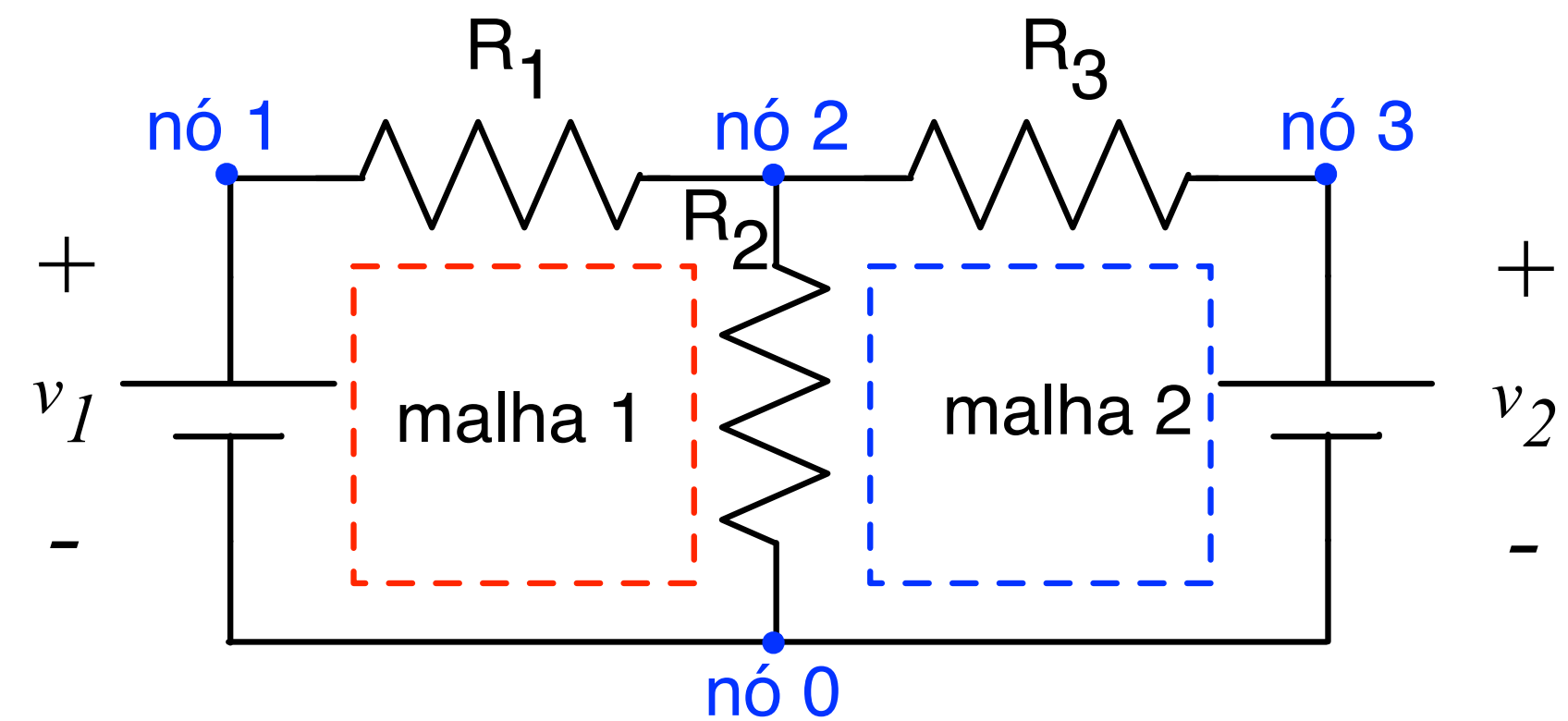
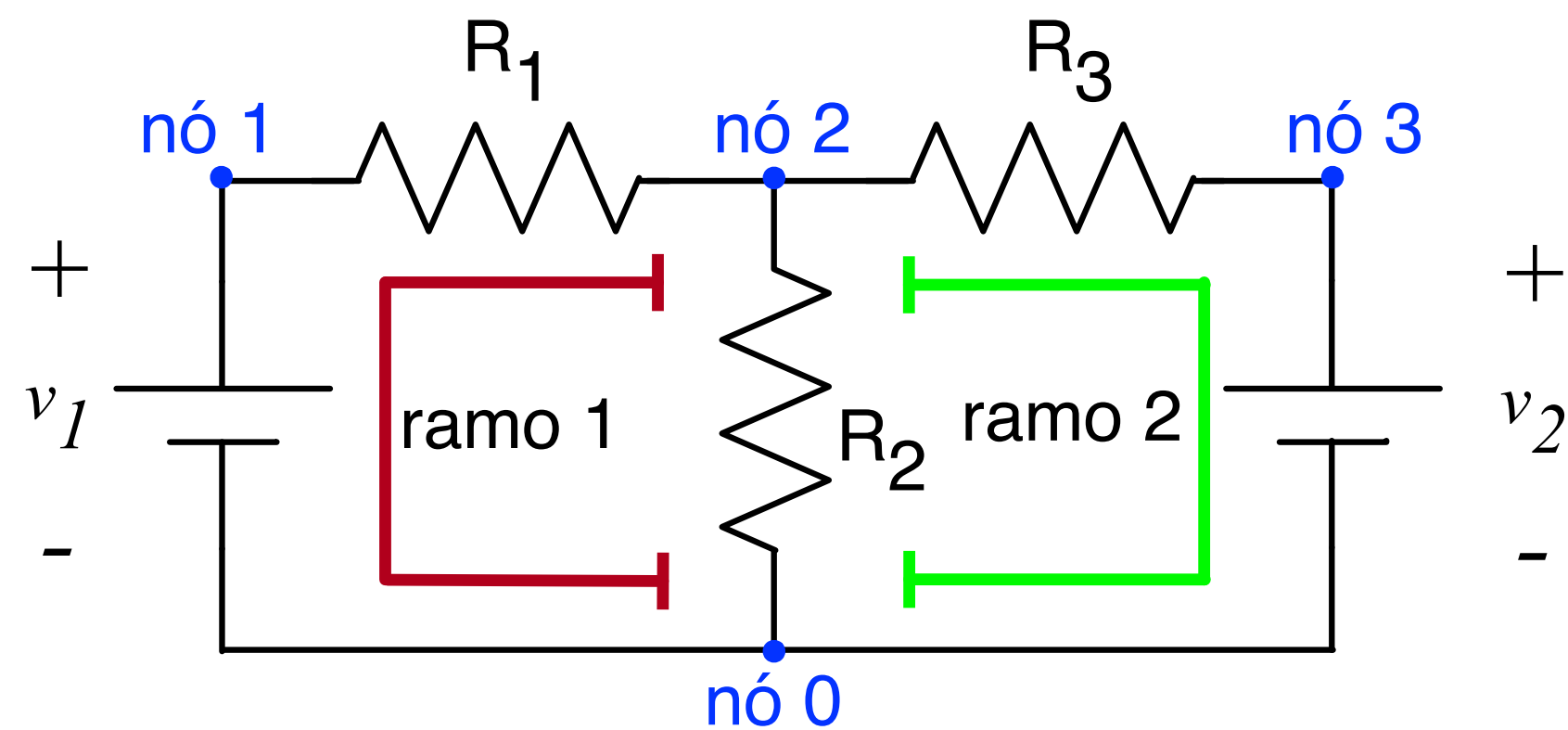
A análise de circuitos utilizando a análise de malhas ou nós é muito comum durante o projeto de equipamentos e dispositivos eletrônicos, como por exemplo circuitos para controle de acesso, automação industrial, etc.



# Análise dos Nós

## Definições importantes:

- Nó - ponto do circuito no qual dois ou mais componentes estão conectados;
- Ramo - caminho entre dois nós, sendo a corrente a mesma em todos os elementos deste caminho (ramo);
- Malha - caminho fechado ao longo de um circuito elétrico.



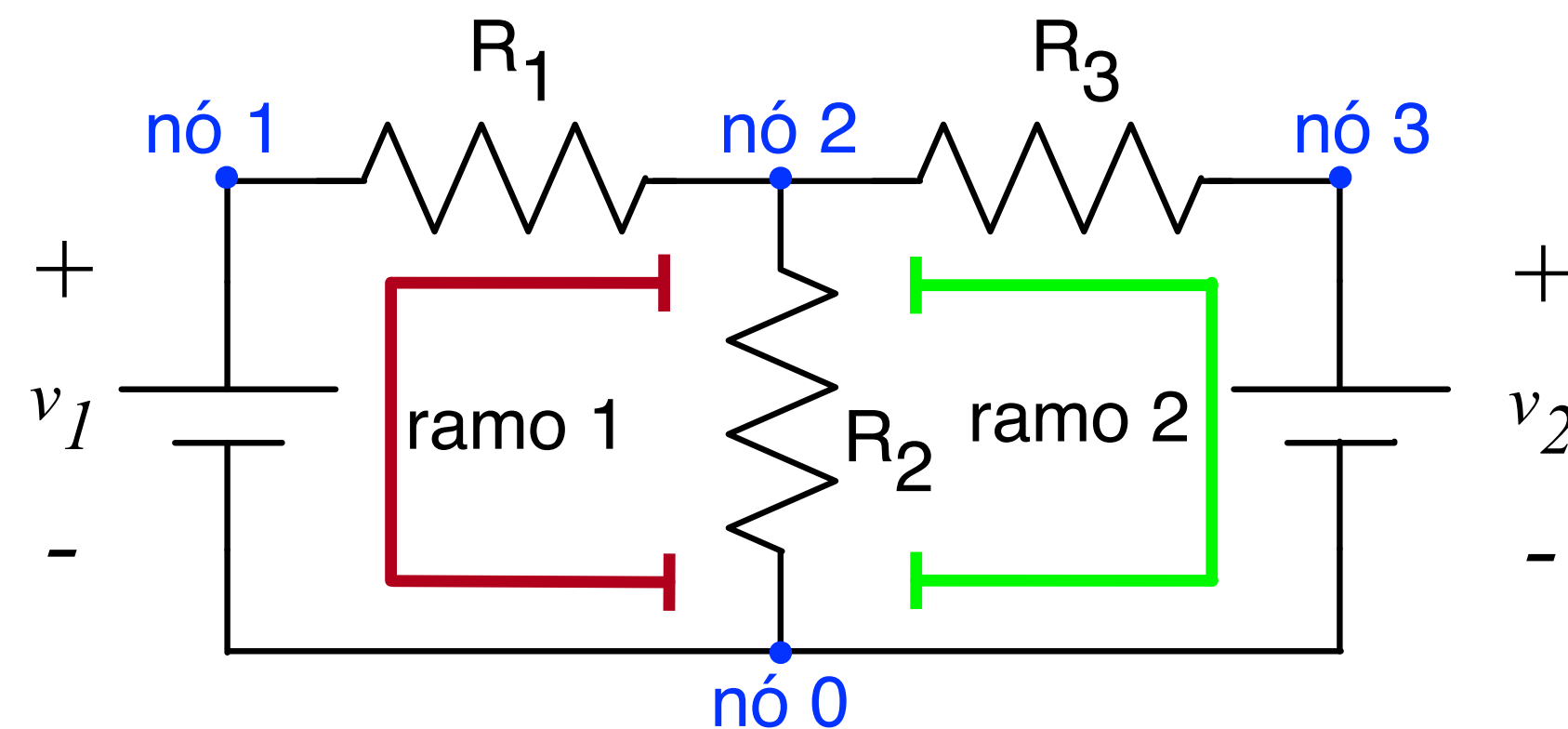
# Análise dos Nós

## Notar que:

- Nó 0 - tensão nula, pois este é o nó de referência,  $V_0 = 0$ ;
- Nó 1 - tensão dada pela fonte  $v_1$ ,  $V_1 = v_1$ ;
- Nó 3 - tensão dada pela fonte  $v_2$ ,  $V_3 = v_2$ .

## Convenção:

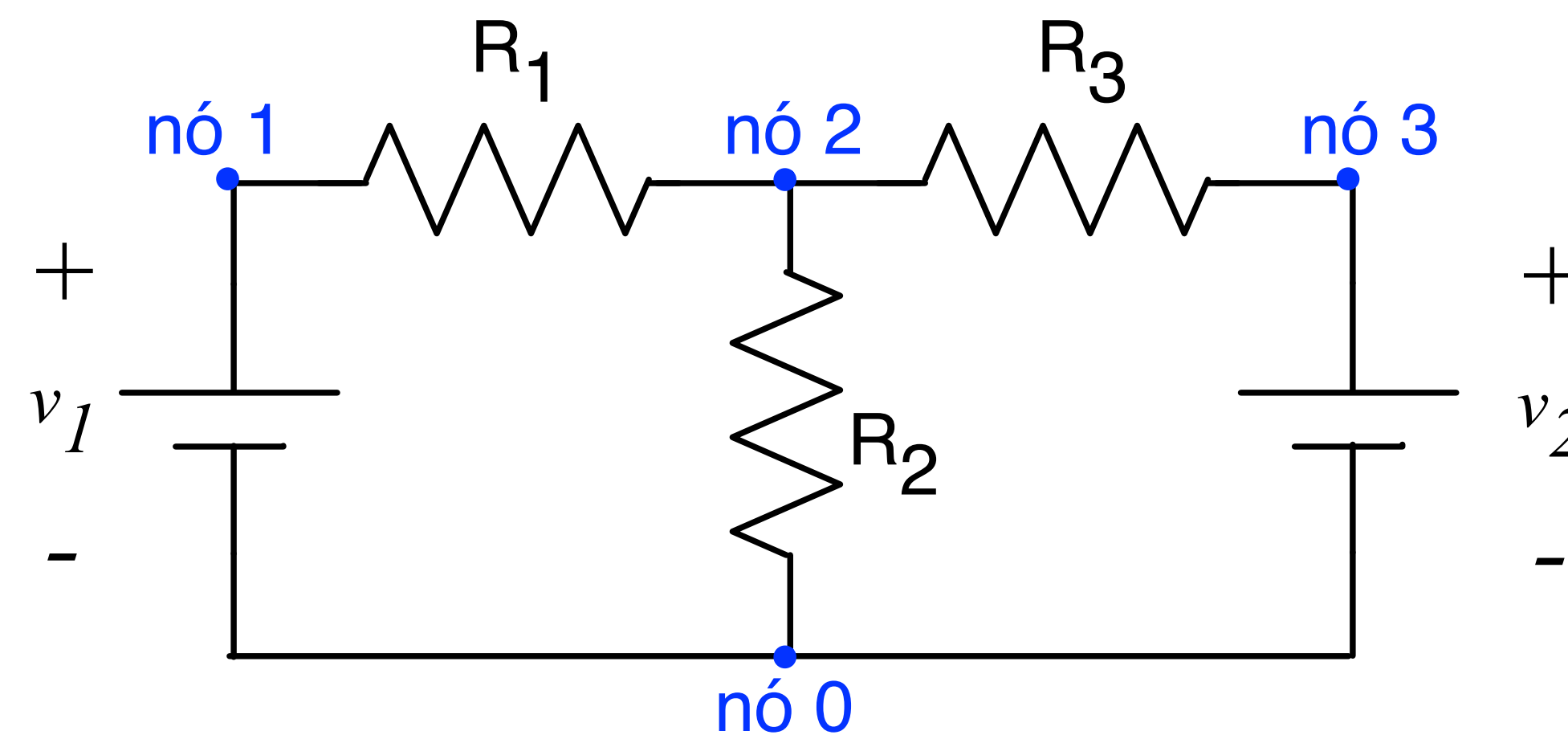
- $V_{21}$  - tensão entre os nós 2 e 1, diferença de potencial do nó 2 menos a diferença de potencial no nó 1,  $V_{21} = V_2 - V_1$ ;
- $V_{10}$  - tensão entre os nós 1 e 0 (referência), diferença de potencial do nó 1 menos a diferença de potencial no nó 0,  $V_{10} = V_1 - V_0 = V_1 - 0 = V_1$ .



# Análise dos Nós

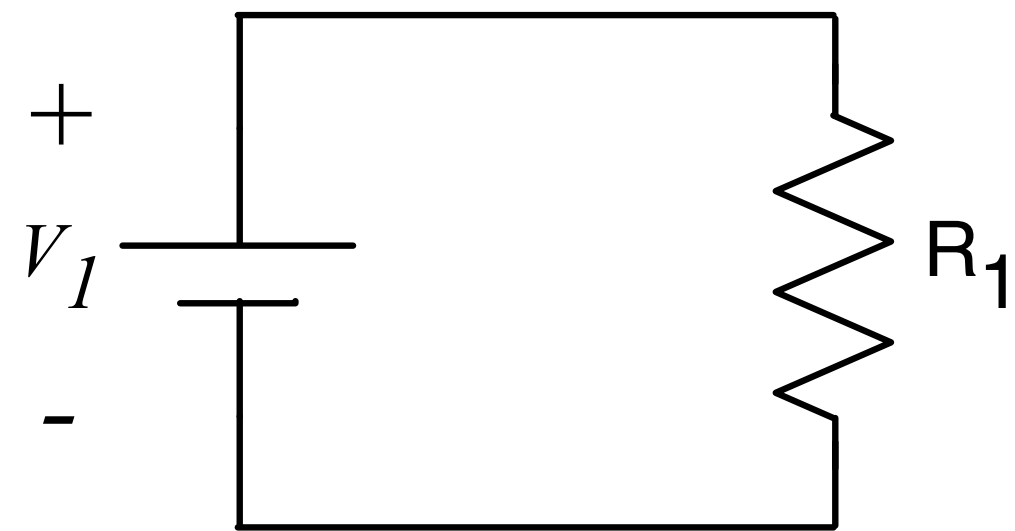
## Passos para aplicar a análise nodal:

1. Identificar todas as tensões e correntes nos componentes;
2. Identificar os nós do circuito e ramos do circuito;
3. Definir o nó de referência;
4. Expressar as tensões conhecidas nos nós;
5. Aplicar as Lei de Kirchhoff das Correntes para cada nó com tensão desconhecida, considerando que as correntes saem daquele nó, independente do sentido verdadeiro das correntes do circuito;
6. Resolver o sistema de equações lineares obtido.



# Análise dos Nós

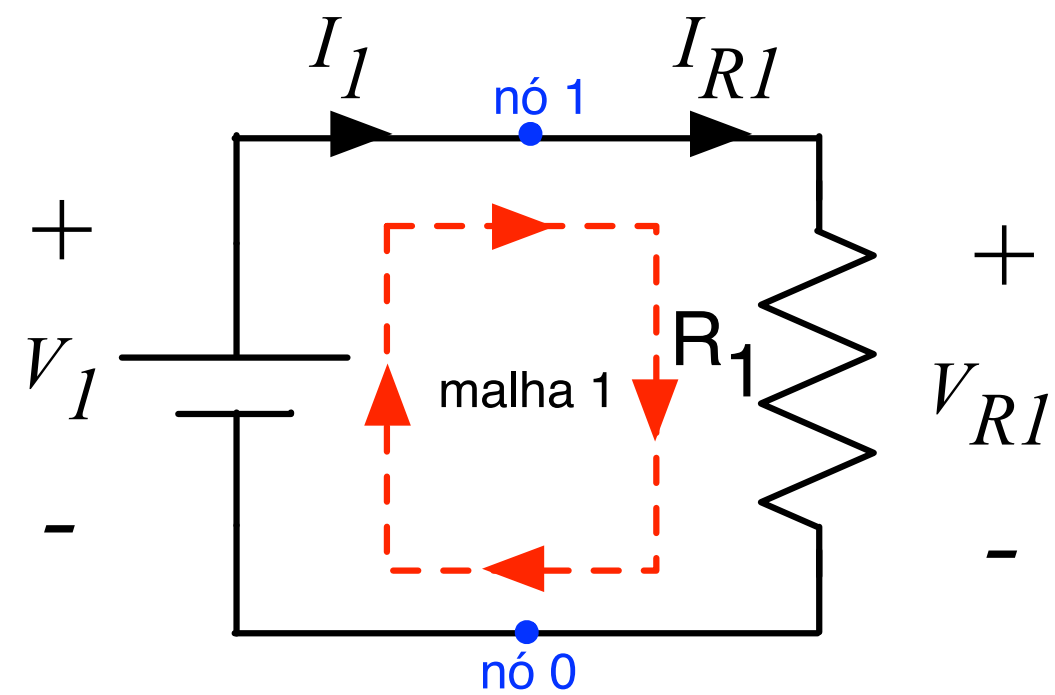
Circuito simples com dois nós:



$$V_o = 0$$

$$V_1 = V_1$$

$$V_{R1} = V_{10} = V_1$$



$$I_1 = I_{R1} = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{V_1}{R_1}$$

Exemplo 1:

- Uma fonte de tensão possui tensão de 12 V e está conectada em um resistor de 2 Ω. Determine a corrente e a tensão no resistor.

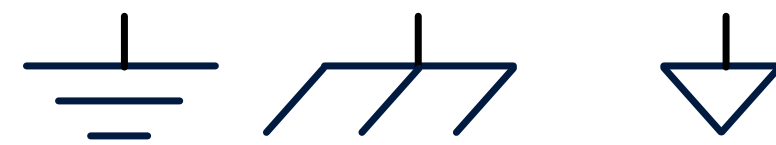
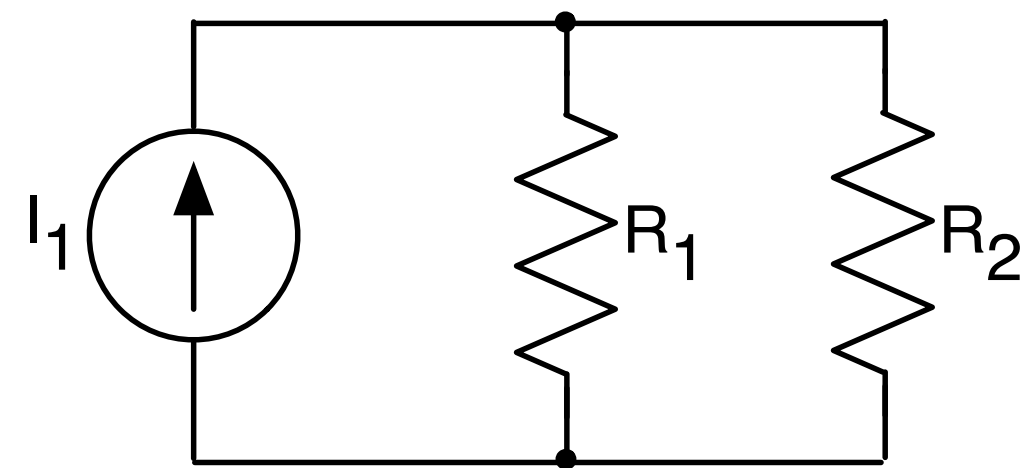
$$V_{R1} = V_1 = 12V$$

$$I_1 = I_{R1} = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{V_1}{R_1} = \frac{12}{2} = 6A$$

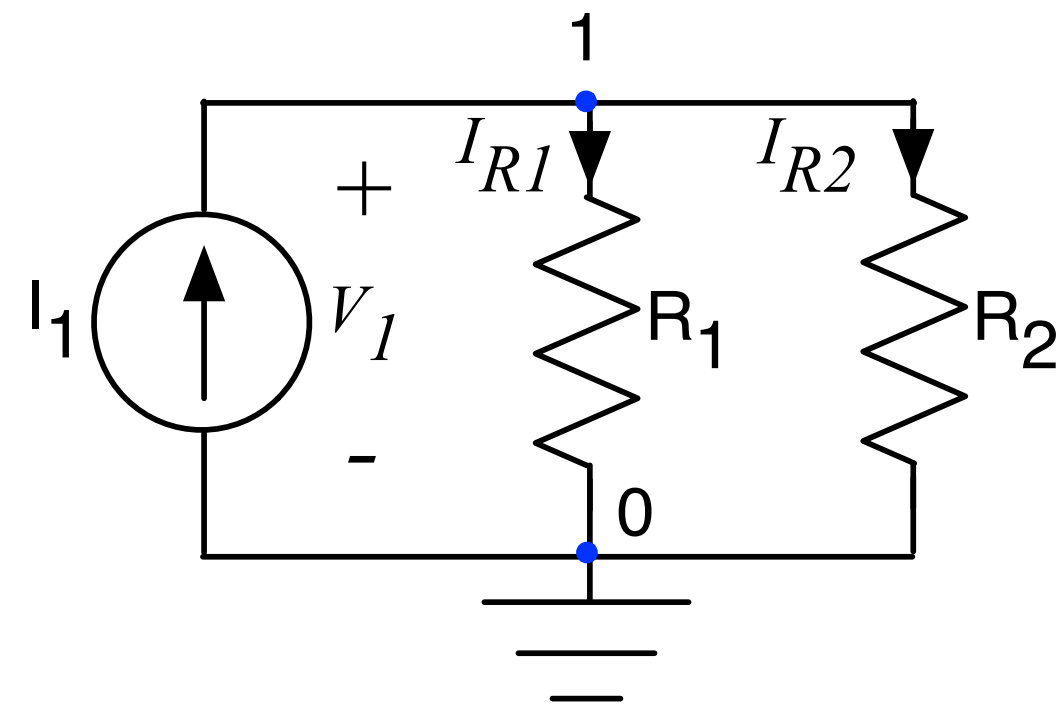


# Análise dos Nós

Circuito simples com dois nós:



Símbolos para a referência (GND)



$$I_{R1} + I_{R2} = I_1 \rightarrow \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} = I_1 \rightarrow V_1 \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = I_1$$

$$V_1 = \frac{I_1}{\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

**Exemplo 2:**

- O circuito da figura ao lado é formado por três componentes, sendo uma fonte de alimentação de 3 A ( $I_1$ ) e dois resistores:  $R_1 = 5 \Omega$  e  $R_2 = 3 \Omega$ . Determine todas as correntes e tensões nos elementos do circuito.

$$-I_1 + I_{R1} + I_{R2} = 0 \rightarrow I_{R1} + I_{R2} = I_1$$

$$I_{R1} = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{V_{10}}{R_1} = \frac{V_1}{R_1}$$

$$I_{R2} = \frac{V_{R2}}{R_2} = \frac{V_{10}}{R_2} = \frac{V_1}{R_2}$$

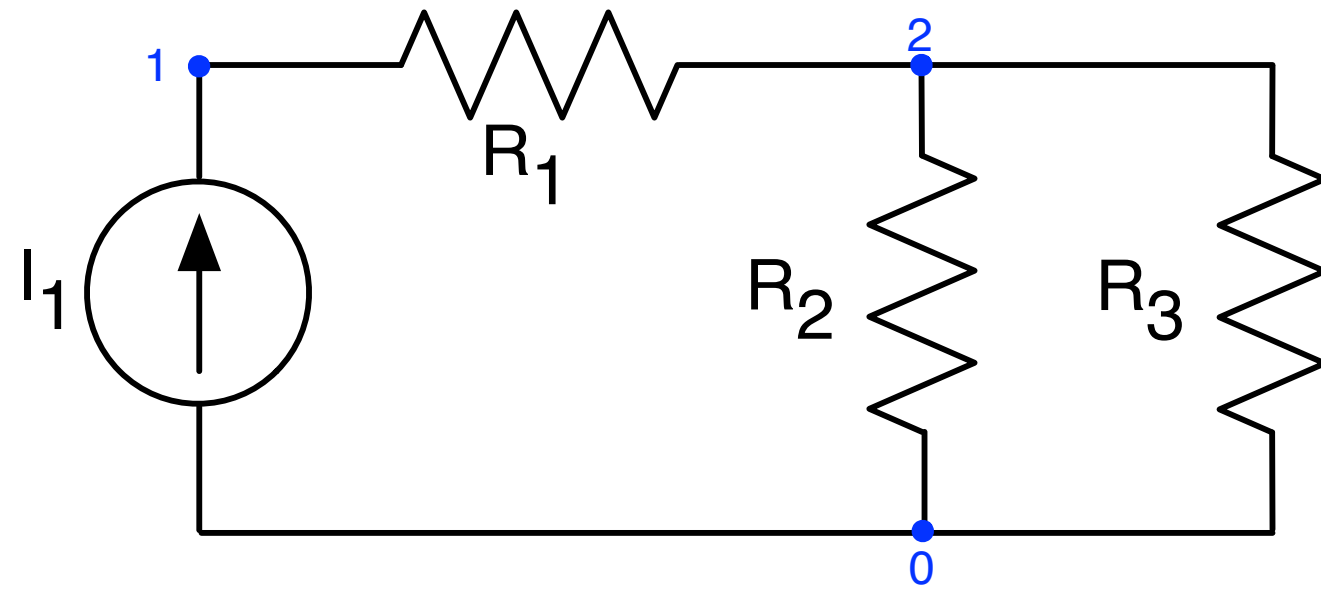
$$V_1 = \frac{I_1}{\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} = \frac{3}{\left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right)} = 5,625V$$

$$I_{R1} = \frac{V_1}{R_1} = \frac{5,625}{5} = 1,125A$$

$$I_{R2} = \frac{V_1}{R_2} = \frac{5,625}{3} = 1,875A$$

# Análise dos Nós

Circuito com três nós:



$$-I_1 + I_{R1} = 0 \rightarrow -I_1 + \frac{V_{12}}{R_1} = 0 \rightarrow -I_1 + \frac{V_1 - V_2}{R_1} = 0 \rightarrow \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_1} = I_1$$

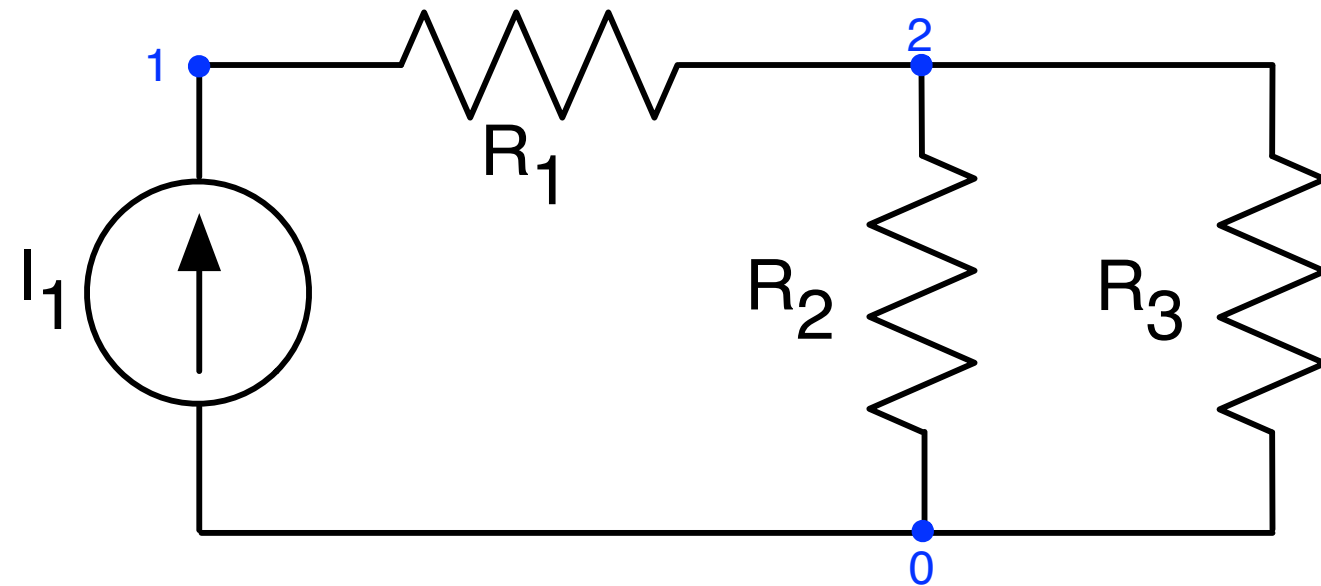
$$+\frac{V_2 - V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_2}{R_3} = 0 \rightarrow -\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_2}{R_3} = 0$$

$$-\frac{V_1}{R_1} + V_2 \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_1} = I_1 \\ -\frac{V_1}{R_1} + V_2 \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = 0 \end{cases}$$

# Análise dos Nós

Circuito com três nós:



Exemplo 3:

- Uma fonte de corrente possui corrente de 3 A e está conectada em três resistores,  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , conforme o circuito da figura ao lado. Os resistores tem resistência de  $5 \Omega$  ( $R_1$ ),  $3 \Omega$  ( $R_2$ ) e  $2 \Omega$  ( $R_3$ ). Determine as tensões dos nós do circuito.

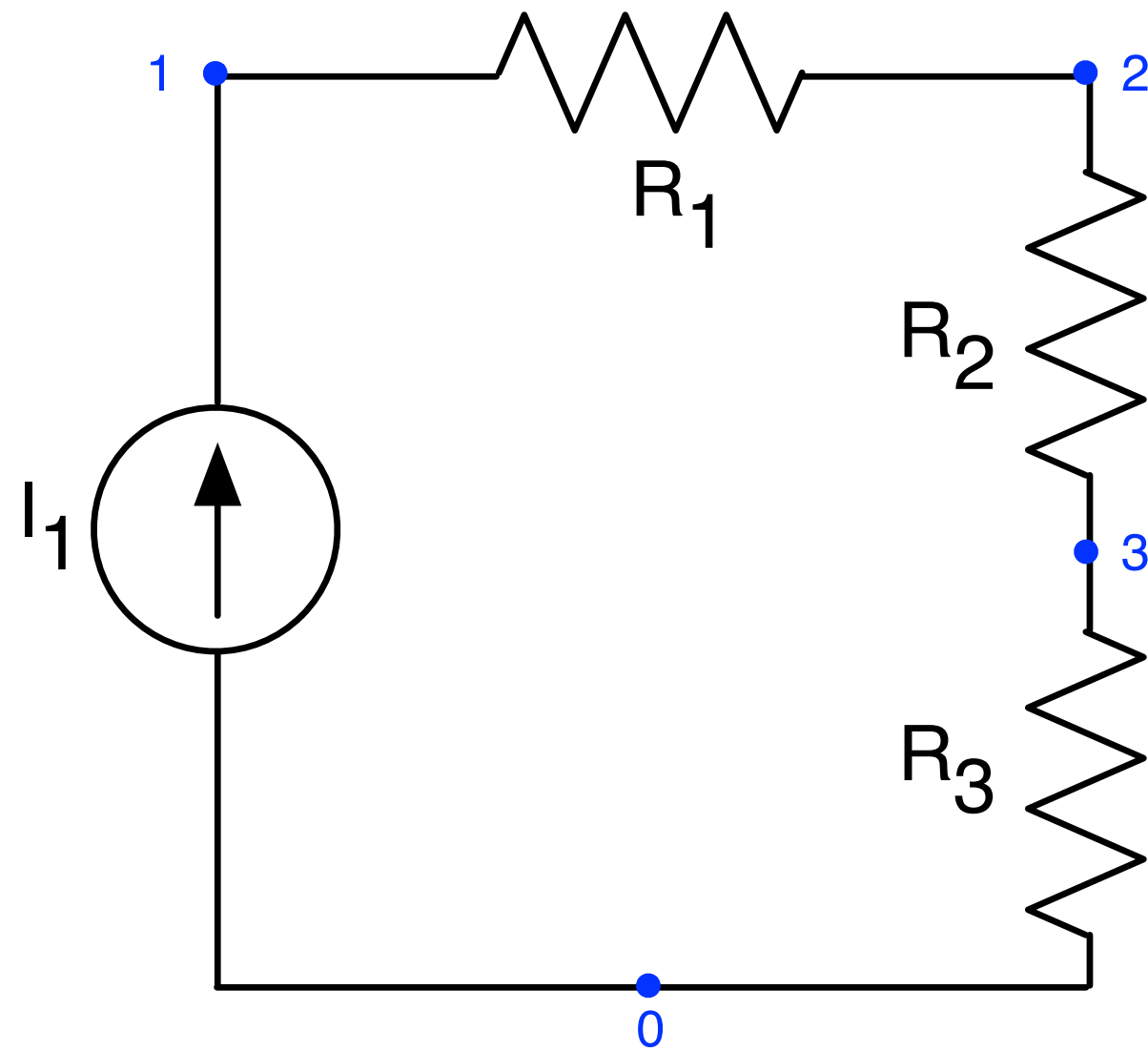
$$\begin{cases} \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_1} = I_1 \\ -\frac{V_1}{R_1} + V_2 \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{V_1}{5} - \frac{V_2}{5} = 3 \\ -\frac{V_1}{5} + V_2 \cdot \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{V_1}{5} - \frac{V_2}{5} = 3 \\ -\frac{V_1}{5} + \frac{31 \cdot V_2}{30} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} V_1 = 18,6V \\ V_2 = 3,6V \end{matrix}$$

$$R_T = R_1 + R_2 // R_3 = 5 + \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = 6,2 \Omega$$

$$V_1 = R_T \cdot I_1 = 6,2 \cdot 3 = 18,6V$$

# Análise dos Nós

Circuito com quatro nós:



$$-I_1 + \frac{V_1 - V_2}{R_1} = 0 \rightarrow \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_1} = I_1$$

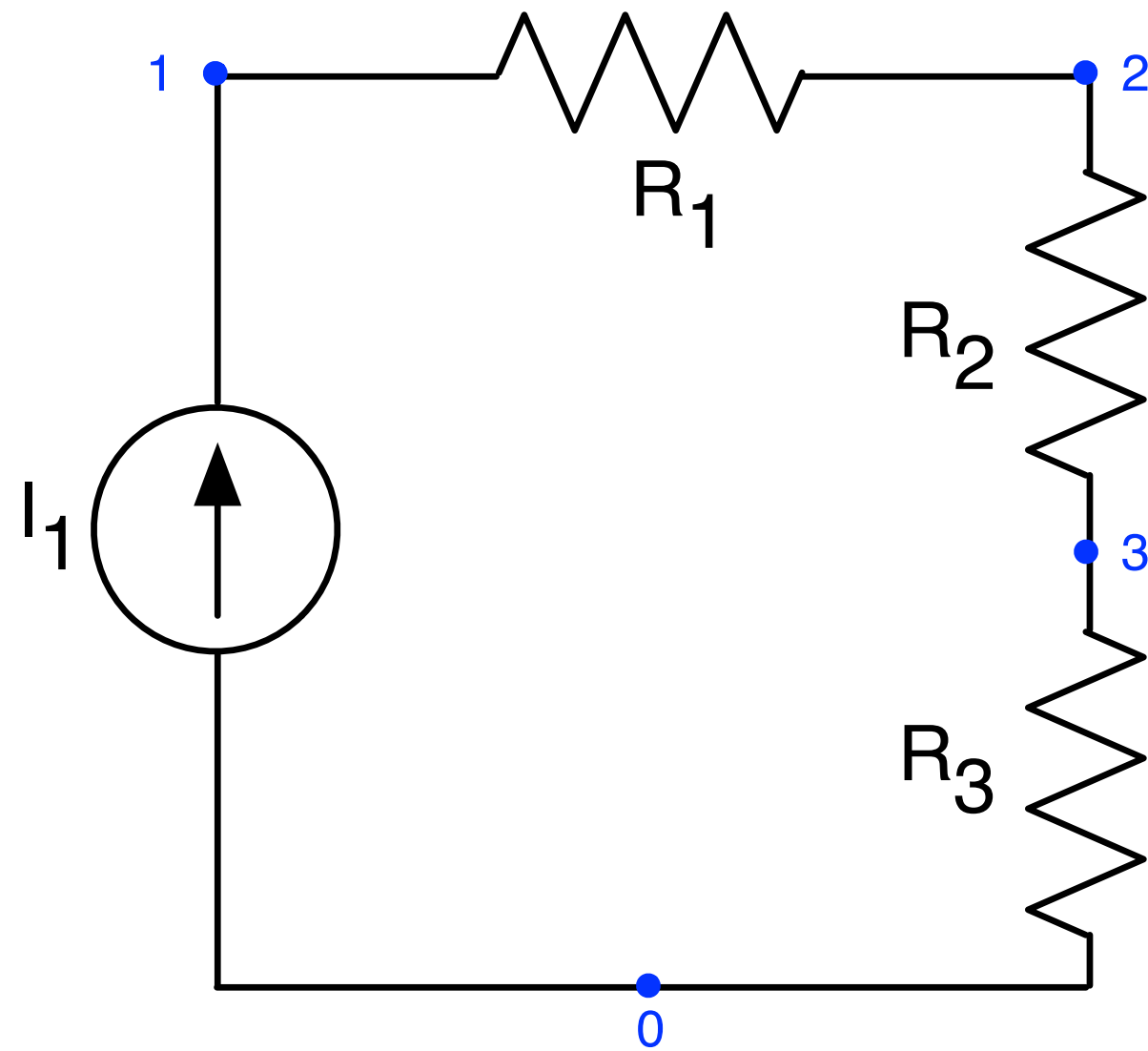
$$+\frac{V_2 - V_1}{R_1} + \frac{V_2 - V_3}{R_2} = 0 \rightarrow -\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} - \frac{V_3}{R_2} = 0 \rightarrow -\frac{V_1}{R_1} + V_2 \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{V_3}{R_2} = 0$$

$$+\frac{V_3}{R_3} + \frac{V_3 - V_2}{R_2} = 0 \rightarrow -\frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} = 0 \rightarrow -\frac{V_2}{R_2} + V_3 \cdot \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_1} = I_1 \\ -\frac{V_1}{R_1} + V_2 \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{V_3}{R_2} = 0 \\ -\frac{V_2}{R_2} + V_3 \cdot \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = 0 \end{cases}$$

# Análise dos Nós

Circuito com quatro nós:



## Exemplo 4:

- Uma fonte de corrente com corrente de 2 A está conectada em três resistores, sendo eles:  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$  e  $R_3 = 2 \Omega$ ; conforme mostrado na figura ao lado. Determine as tensões sobre os resistores.

$$\begin{cases} \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_1} = I_1 \\ -\frac{V_1}{R_1} + V_2 \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{V_3}{R_2} = 0 \\ -\frac{V_2}{R_2} + V_3 \cdot \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{V_1}{10} - \frac{V_2}{10} = 2 \\ -\frac{V_1}{10} + V_2 \cdot \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right) - \frac{V_3}{5} = 0 \\ -\frac{V_2}{5} + V_3 \cdot \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{V_1}{10} - \frac{V_2}{10} = 2 \\ -\frac{V_1}{10} + \frac{3 \cdot V_2}{10} - \frac{V_3}{5} = 0 \\ -\frac{V_2}{5} + \frac{7 \cdot V_3}{10} = 0 \end{cases}$$

$$V_1 = 34V$$

$$V_{R1} = V_1 - V_2 = 34 - 14 = 20V$$

$$V_2 = 14V$$

$$V_{R2} = V_2 - V_3 = 14 - 4 = 10V$$

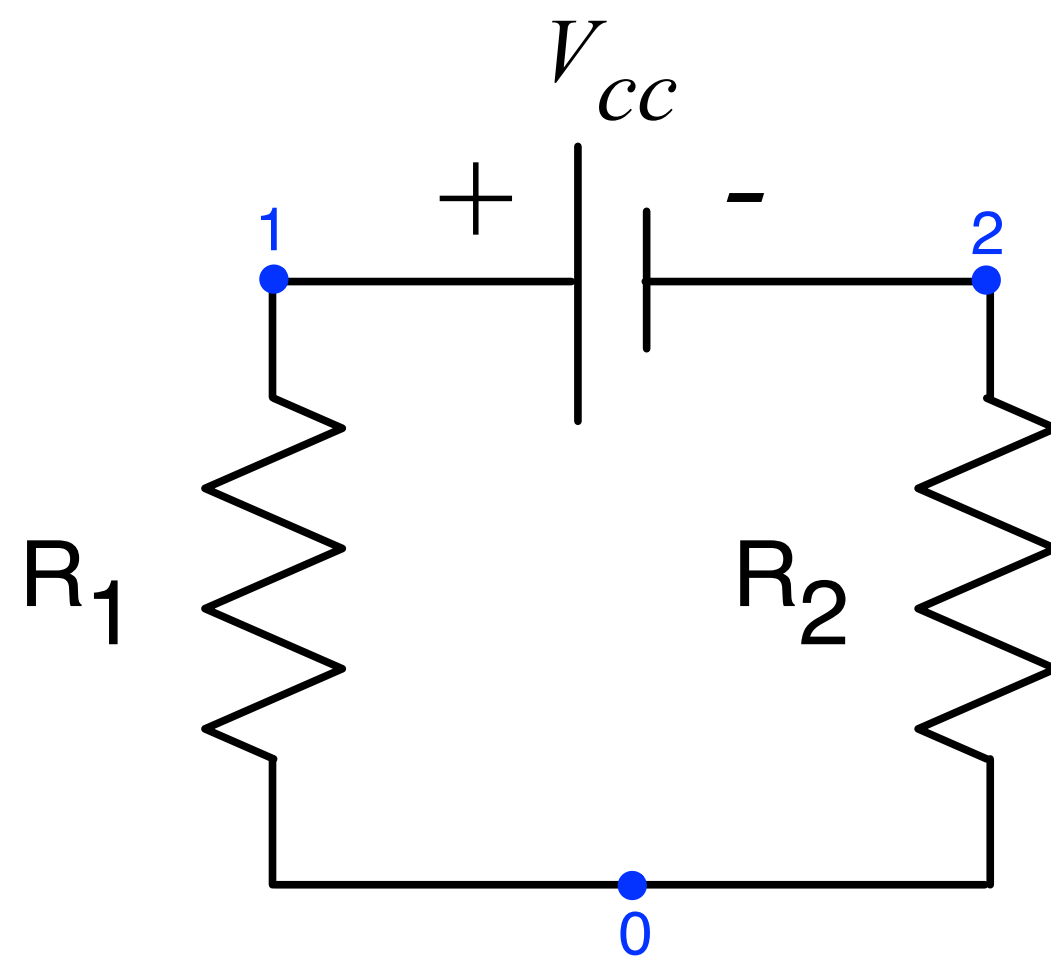
$$V_3 = 4V$$

$$V_{R3} = V_3 - V_0 = 4 - 0 = 4V$$

# Análise dos Nós

## Super nós:

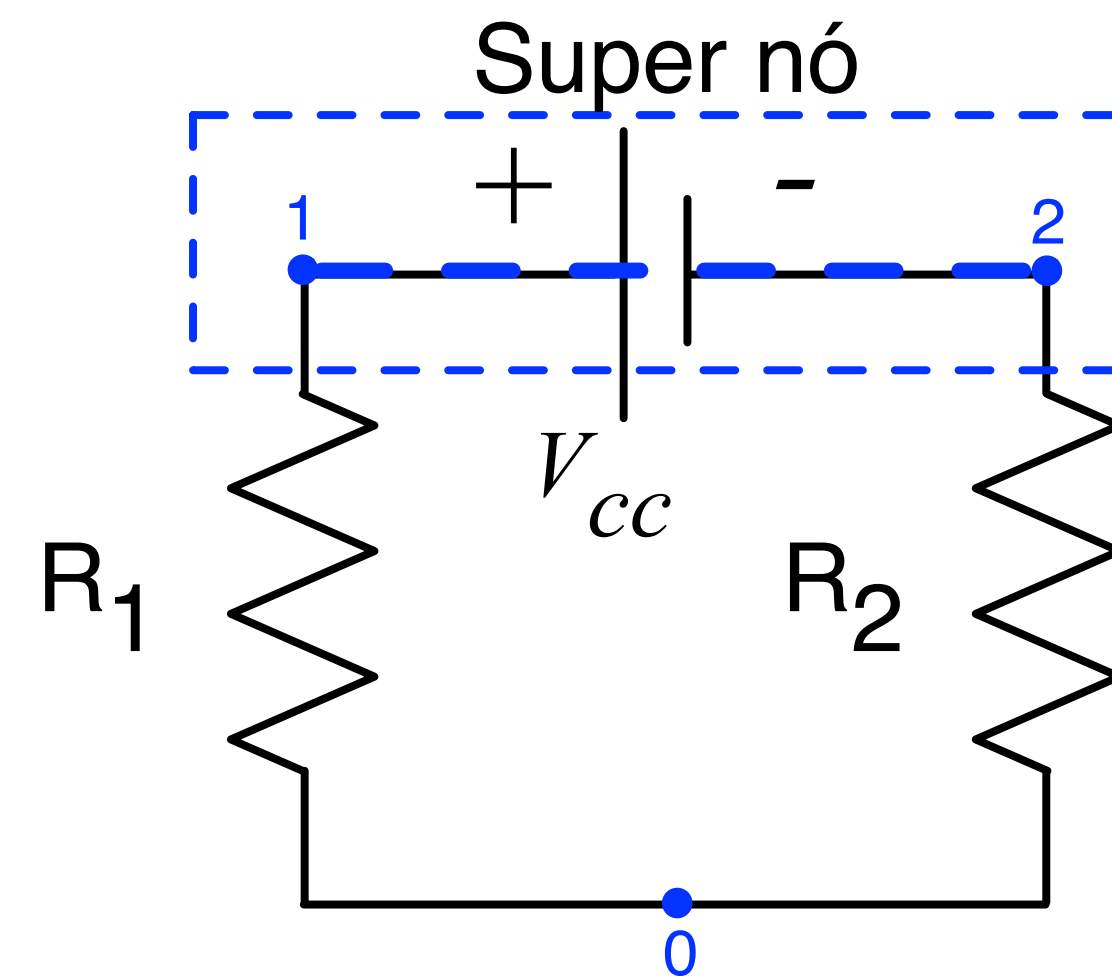
- Qual a corrente entre os nós 1 e 2, isto é, na fonte de tensão?
- Alternativa: definir um nó que englobe a fonte de tensão. Este nó englobando a fonte de tensão, pode ser chamado de Super Nó.



$$+\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = 0$$

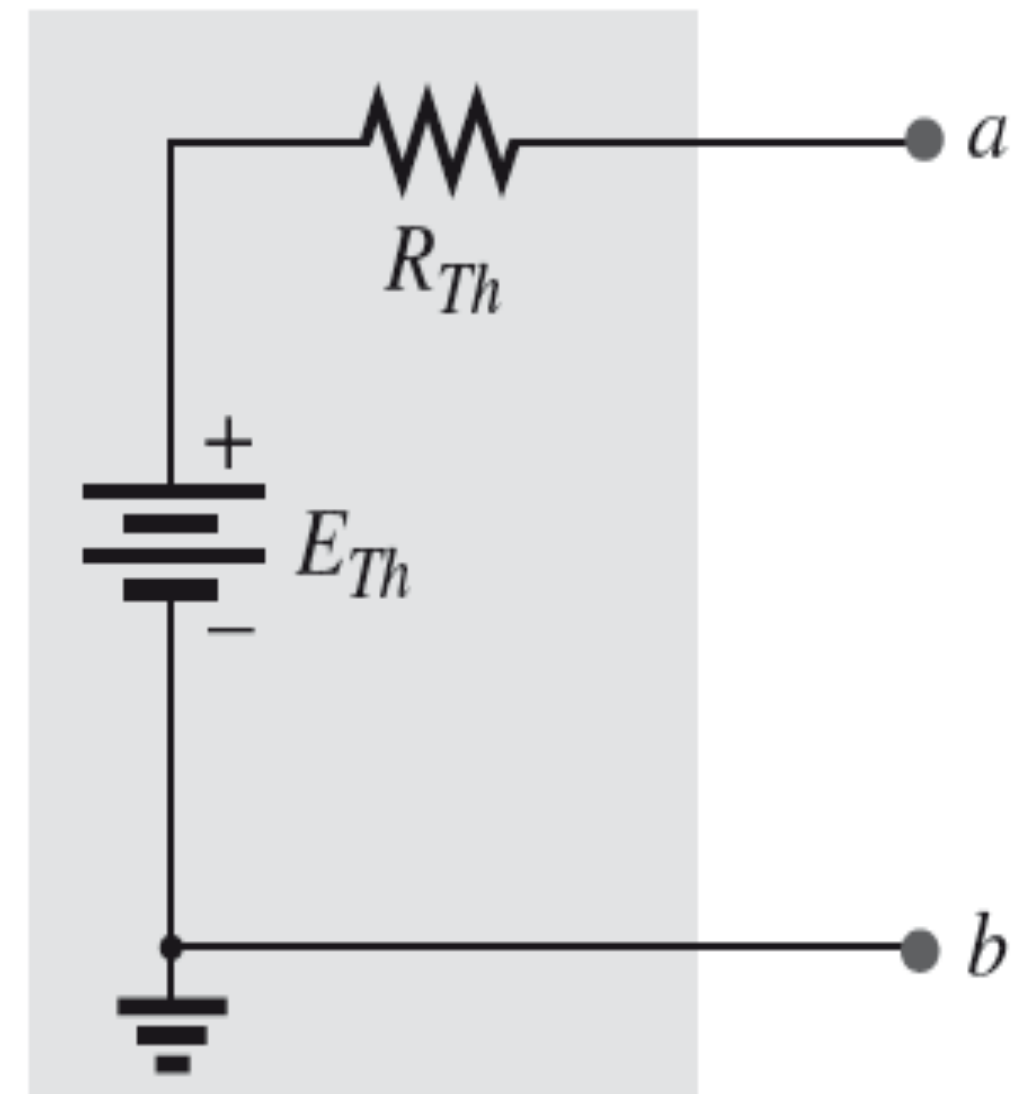
$$V_1 - V_2 = V_{cc}$$

$$\begin{cases} \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = 0 \\ V_1 - V_2 = V_{cc} \end{cases}$$



# Próxima Aula

## Teoremas de Thévenin e Norton



Fonte: Capítulo 9 - Teoremas para análise de circuitos do livro *Análise de Circuitos* de Robert L. Boylestad, Pearson, 2012.