

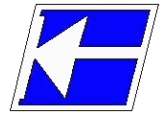
INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETRÔNICA

CURSO SUPERIOR DE TECNOLOGIA EM ELETRÔNICA INDUSTRIAL

Circuitos Elétricos I



---

# GUIA DE ESTUDO

---

## - OBJETIVO DE APRENDIZAGEM - ANÁLISE DE MALHAS

Prof. Clóvis Antônio Petry.

Florianópolis, setembro de 2020.

---

## **ANÁLISE DE MALHAS**

### **Objetivo de Aprendizagem**

Aplicar a análise de malhas ao estudo de circuitos elétricos.

### **Objetivos parciais**

- Conhecer a análise de malhas.
- Aplicar a análise de malhas;
- Resolver circuitos elétricos.

### **Aulas relacionadas**

Este objetivo de aprendizagem está relacionado com a aula 08 da disciplina.

### **Pré-requisitos**

Ter estudado o objetivo de aprendizagem 11 relacionado ao Teorema da Máxima Transferência de Potência.

### **Continuidade dos Estudos**

O próximo objetivo de aprendizagem será estudar a análise de nós.

### **Roteiro para estudos**

Os estudos referentes a este objetivo de aprendizagem consistem em:

1. Estudar este documento resumo, realizando as atividades propostas no mesmo;
2. Responder o quiz relacionado a este objetivo de aprendizagem;
3. Caso perceba necessidade, estudar a apresentação deste assunto ou ler o capítulo do livro texto usado na disciplina;
4. Realizar os exercícios deste tópico da matéria;
5. Realizar o laboratório virtual, se for possível, relacionado a este objetivo de aprendizagem;
6. Realizar a avaliação final para progredir ao próximo conteúdo.

### **Referências**

- Material disponibilizado para a disciplina de Circuitos Elétricos I – 2020/1. Departamento Acadêmico de Eletrônica, Instituto Federal de Santa Catarina, Campus Florianópolis.
- BOYLESTAD, Robert. Introdução à análise de circuitos. Tradução de Daniel Vieira, Jorge Ritter. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

---

## Check-list

Caro estudante, verifique se você completou as atividades deste objetivo de aprendizagem e obteve êxito para continuar seus estudos.

Assinale as atividades realizadas:

Estudo do documento resumo:

- Leitura do documento resumo;
- Exercícios do documento resumo;
- Atividade avaliativa do documento resumo.
- Obtive êxito e entendi o conteúdo deste documento;
- Ainda não entendi bem o conteúdo e estudarei o mesmo com mais profundidade.

Estou com dúvidas, irei estudar com mais detalhes este conteúdo:

- Assistir a apresentação relacionada ao conteúdo (apresentação 08);
- Ler o capítulo deste conteúdo no livro (capítulo 08).

Ainda estou com dúvidas:

- Entrarei em contato com o professor.

Obtive êxito, então seguirei em frente:

- Responder ao quiz deste conteúdo no Moodle;
- Informar ao professor que estou avançando com o conteúdo.

Parabéns, continue estudando com afinco e vamos em frente!!

---

# CONTEÚDO

---

## - OBJETIVO DE APRENDIZAGEM - ANÁLISE DE MALHAS

## 1 Introdução

As aulas anteriores do curso abordaram conceitos, leis e teoremas muito importantes para a compreensão e análise de circuitos elétricos. De todo modo, com as técnicas estudadas até aqui não é possível resolver qualquer tipo de circuito elétrico. Já a partir desta aula, com o estudo da análise de malhas e na próxima aula com o estudo da análise nodal, será possível analisar uma gama muito maior de circuitos elétricos, senão praticamente todos eles; lembrando que este curso foca no estudo de circuitos elétricos em corrente contínua.

### 1.1 Conteúdo – O que irei estudar

Estudaremos neste tópico:

- Análise de malhas;
- Aplicação da análise de malhas.

### 1.2 Metodologia – O que devo fazer e como fazer

Leia com atenção o conteúdo a seguir. Ao final deste tópico são apresentados exercícios resolvidos. Após são apresentados alguns exercícios propostos.

Ao realizar estas atividades e se sentir confiante para progredir, siga os passos indicados na primeira página deste documento.

Espera-se que após estudar este assunto, você consiga:

- Explicar o que é a análise de malhas;
- Aplicar a análise de malhas na resolução de circuitos elétricos.

A atividade avaliativa deste objetivo de aprendizagem consistirá em apresentar ao aluno um circuito formado por diversos componentes e solicitar que seja aplicada a análise de malhas na resolução do mesmo.

Exemplo de atividade avaliativa:

1. Explique o que é a análise de malhas;
2. Determinar o número de variáveis e equações a serem calculadas no circuito dado;
3. Aplicar a análise de malhas;
4. Realizar cálculos de circuitos elétricos.

## 2 Análise de Malhas

### 2.1 Introdução

A análise de malhas e análise dos nós são duas técnicas de análise de circuitos utilizadas frequentemente na resolução de circuitos simples e complexos. Em síntese, com estas técnicas é possível implementar um sistema de equações com as variáveis a serem obtidas e a seguir realizar a resolução deste sistema, determinando as grandezas desconhecidas do circuito elétrico.

A seguir será apresentada a técnica de análise de malhas e sua aplicação no estudo de circuitos elétricos.

### 2.2 Análise de Malhas

A análise de malhas consiste em determinar as correntes dos diversos ramos ou malhas de um circuito elétrico, aplicando as Leis de Kirchhoff das Tensões e Correntes e a Lei de Ohm.

As seguintes definições são importantes para se continuar o estudo de circuitos elétricos:

- Nó – ponto do circuito no qual dois ou mais componentes estão conectados;
- Ramo – caminho entre dois nós, sendo a corrente a mesma em todos os elementos deste caminho (ramo);
- Malha – caminho fechado ao longo de um circuito elétrico.

Assim, nota-se que nó é um ponto de conexão de componentes elétricos, podendo ocorrer ou não a divisão de corrente elétrica. Se dois componentes são conectados entre si, não ocorre a divisão da corrente elétrica. Por sua vez, se mais de três componentes estiverem conectados formando um nó, irá ocorrer a divisão da corrente elétrica.

O ramo é o caminho formado ao longo da conexão dos componentes, mas onde não ocorre a divisão da corrente elétrica. Por fim, malha é um caminho fechado, englobando ramos e nós.

O circuito da Figura 1 é formado por duas fontes de tensão e três resistores. Os nós foram identificados de 0 até 3. Normalmente o nó 0 (zero) é a referência do circuito, ou GND (*ground* - terra) ou massa. Note que no nó 1, onde se tem a conexão do resistor  $R_1$  com a fonte  $v_1$ , não ocorre divisão de corrente. Do mesmo modo no que no nó 3, onde se tem a conexão do resistor  $R_3$  com a fonte  $v_2$ , também não ocorre divisão de corrente. Por sua vez, no nó 2, onde se tem a conexão de  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  se tem a divisão de corrente, pois estão conectados aí três componentes.

Note na Figura 1 que o ramo 1 é formado pelo resistor  $R_1$  e pela fonte  $v_1$ , sendo que nestes

dois elementos a corrente é a mesma; o que também ocorre no ramo 2, formado por  $R_3$  e  $v_2$ . Importante observar que o ramo 1 vai do nó 0 até o nó 2, não fazendo parte do mesmo o resistor  $R_2$ . Já o ramo 2 vai do nó 0 até o nó 2, onde também fica de fora o resistor  $R_2$ . Assim, pode-se concluir que ramo é parte de uma malha, mas restrito ao segmento onde a corrente é igual nos elementos.

A Figura 2 mostra o circuito com a identificação de suas malhas, que são: malha 1, formada por  $v_1$ ,  $R_1$  e  $R_2$ ; e malha 2, formada por  $v_2$ ,  $R_2$  e  $R_3$ . Note que a malha 1 engloba o ramo 1 e mais o resistor  $R_2$ , enquanto a malha 2 engloba o ramo 2 e o resistor  $R_2$ .

As Figura 3 e Figura 4 mostram diferentes topologias de circuitos elétricos, com uma até quatro malhas. A identificação do número de malhas e nós é importante para a análise de circuitos elétricos, pois desta identificação resultará o número de equações a serem resolvidas.

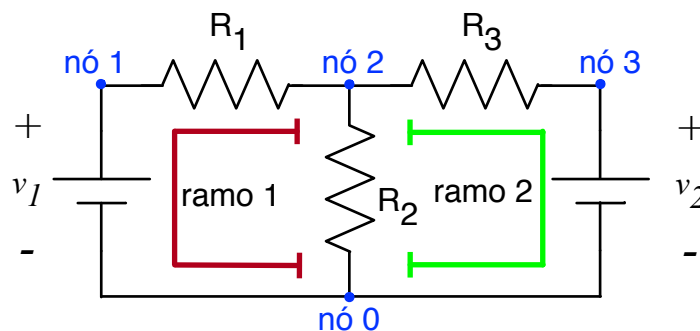


Figura 1 – Circuito para identificação de nós e ramos.

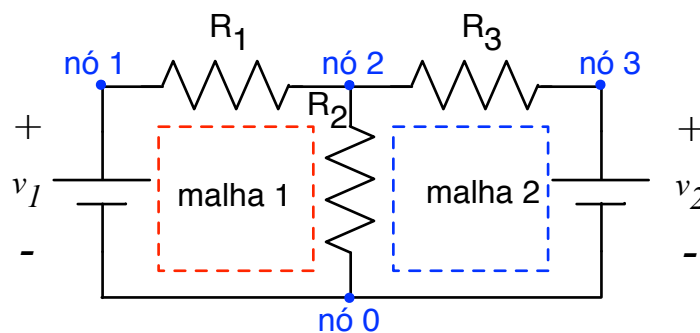


Figura 2 – Circuito para identificação das malhas.



Figura 3 – Circuitos com uma e duas malhas.



Figura 4 – Circuitos com três e quatro malhas.

A aplicação da análise de malhas pode ser realizada de maneira genérica ou parcial, quando se faz a análise das correntes dos ramos. Apresentaremos aqui a análise de malhas de maneira geral, pois a análise das correntes nos ramos é uma simplificação da análise de malhas geral.

Ao aplicar a análise de malhas consiste em realizar os seguintes passos:

1. Identificar todas as tensões e correntes nos componentes;
2. Identificar os nós, ramos e malhas do circuito;
3. Associar uma corrente fictícia a cada malha fechada independente do circuito;
4. Ajustar as polaridades das tensões nos resistores em função das correntes atribuídas no passo anterior;
5. Aplicar as Lei de Kirchhoff das Tensões ao longo das malhas, usando por exemplo, o sentido horário;
6. Resolver o sistema de equações lineares obtido.

Importante destacar que ao aplicar a Lei de Kirchhoff das Tensões em um resistor no qual mais que uma corrente de malha estiver passando, deve-se realizar a subtração das correntes para obter a tensão resultante sobre o mesmo.

A Figura 5 mostra um resistor ( $R_2$ ) pelo qual estão circulando duas correntes de malhas,  $i_1$  e  $i_2$ . Ao aplicar a Lei de Kirchhoff das Tensões na malha 1, para obter  $i_1$ , se escreveria:

$$R_2 \cdot i_1 - R_2 \cdot i_2 = R_2 \cdot (i_1 - i_2)$$

Já ao percorrer a malha 2, para determinar  $i_2$ , se obteria:

$$R_2 \cdot i_2 - R_2 \cdot i_1 = R_2 \cdot (i_2 - i_1)$$

Note que as quedas de tensão sobre o resistor, em virtude da malha em que se está aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões podem ficar invertidas, como o caso mostrado



anteriormente. Por isso deve-se considerar as quedas de tensão nos elementos conforme o sentido da corrente atribuída naquela malha em análise.

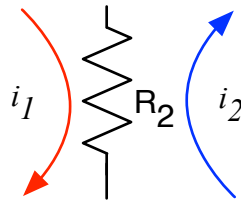


Figura 5 – Aplicação da Lei de Kirchhoff das Tensões em resistor com mais que uma corrente.

## 3 Aplicação da Análise de Malhas

### 3.1 Introdução

A seguir será aplicada a análise de malhas abordada no capítulo anterior, a partir de circuitos mais simples até circuitos mais complexos.

### 3.2 Circuito com Uma Malha

O circuito da Figura 6 apresenta um circuito simples, com apenas dois componentes, uma fonte de tensão ( $v_1$ ) e um resistor ( $R_1$ ). A mesma figura mostra a identificação das grandezas a serem determinadas ( $I_1$  e  $V_{R1}$ ), os nós do circuito (nó 1 e nó 2) e as malhas do circuito (malha 1).

Em sendo um circuito de apenas uma malha, escrevendo-se as tensões a partir da aplicação da Lei de Kirchhoff das Tensões, iniciando no nó 0 e no sentido horário, se obtém:

$$-V_1 + V_{R1} = 0 \rightarrow V_{R1} = V_1$$

Por sua vez, aplicando a Lei de Kirchhoff das Correntes no nó 1, por exemplo, se obtém:

$$+I_1 - I_{R1} = 0 \rightarrow I_{R1} = I_1$$

Assim, aplicando a Lei de Ohm, se obtém:

$$I_1 = I_{R1} = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{V_1}{R_1}$$

Note que este circuito é simples e as expressões anteriores poderiam ser obtidas diretamente, com os conhecimentos já estudados anteriormente neste curso. Neste caso foi resolvida apenas uma equação, que foi a aplicação da Lei de Ohm no resistor  $R_1$ .

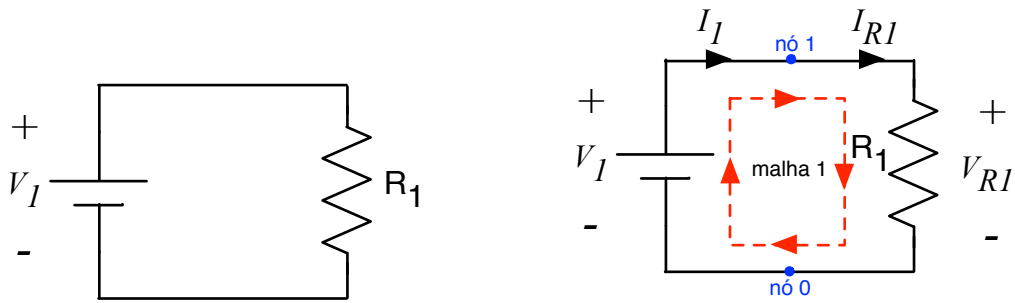


Figura 6 – Análise de malhas em circuito com uma malha.

### Exemplo 1:

Uma fonte de tensão possui tensão de 12 V e está conectada em um resistor de 2 Ω. Determine a corrente e tensão no resistor.

Neste caso, sendo um circuito de apenas dois componentes e uma malha, se tem:

$$V_{R1} = V_1 = 12V$$

$$I_1 = I_{R1} = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{V_1}{R_1} = \frac{12}{2} = 6A$$

### Exemplo 2:

O circuito da Figura 7 é formado por quatro componentes, sendo uma fonte de alimentação de 12 V ( $V_1$ ) e três resistores:  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$  e  $R_3 = 2 \Omega$ . Determine todas as correntes e tensões nos elementos do circuito.

Este circuito já foi analisado no estudo dos circuitos série e poderia ser resolvido encontrando-se a resistência equivalente ou total do conjunto de resistores. No entanto, para mostrar a aplicabilidade da análise de malhas, vamos resolver o mesmo fazendo uso desta técnica.

Assim, inicialmente devemos identificar os nós, ramos e malhas; a seguir identificando as correntes e tensões nos elementos do circuito, conforme está mostrado na figura.

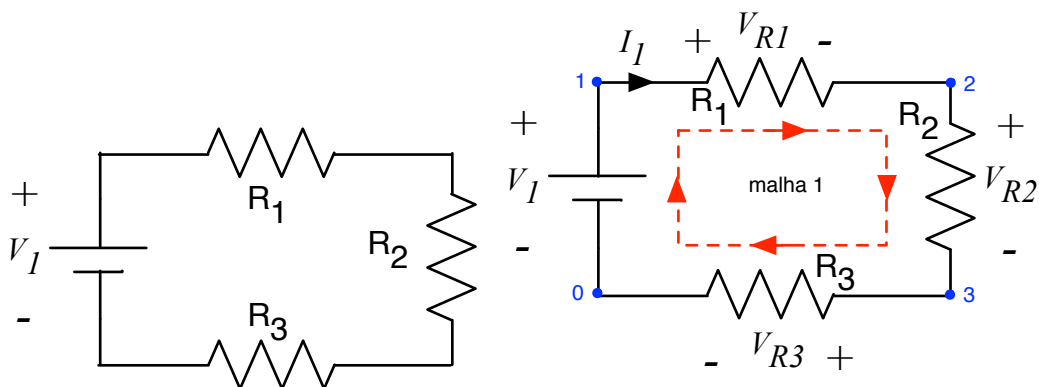


Figura 7 – Análise de malhas em circuito com uma malha e quatro componentes.

O circuito da Figura 7 tem 4 nós, mas em nenhum deles ocorre a divisão de corrente, pois em todos eles se têm a conexão de apenas dois componentes. Além disso, mesmo tendo 4 componentes, o circuito tem apenas uma malha.

A partir da atribuição de um sentido para a corrente de malha, que neste caso coincide com a corrente total do circuito  $I_1$ , e das quedas de tensão sobre todos os resistores, pode-se escrever a Lei de Kirchhoff das Tensões ao longo da malha, iniciando no nó 0, sempre no sentido horário por convenção:

$$-V_1 + V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} = 0 \rightarrow V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} = V_1$$

Como se tem uma malha apenas, conforme demonstrado no exemplo 1, a corrente será a mesma em todos os resistores:

$$I_{R_1} = I_{R_2} = I_{R_3} = I_1$$

Então, aplicando a Lei de Ohm em cada resistor:

$$V_{R_1} = R_1 \cdot I_{R_1} = R_1 \cdot I_1$$

$$V_{R_2} = R_2 \cdot I_{R_2} = R_2 \cdot I_1$$

$$V_{R_3} = R_3 \cdot I_{R_3} = R_3 \cdot I_1$$

Agora substituindo estas expressões na equação obtida pela aplicação da Lei de Kirchhoff das Tensões:

$$V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} = V_1 \rightarrow R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_1 = V_1$$

Esta é a equação a ser resolvida, que em virtude de o circuito ter apenas uma malha, tem apenas uma variável desconhecida, que é a corrente  $I_1$ .

Assim:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{12}{5 + 3 + 2} = \frac{12}{10} = 1,2A$$

Por fim, conforme solicitado, as tensões em cada resistor serão:

$$V_{R_1} = R_1 \cdot I_1 = 5 \cdot 1,2 = 6V$$

$$V_{R_2} = R_2 \cdot I_1 = 3 \cdot 1,2 = 3,6V$$

$$V_{R_3} = R_3 \cdot I_1 = 2 \cdot 1,2 = 2,4V$$

### 3.1 Circuito com Duas Malhas

O circuito da Figura 8 apresenta um circuito ainda simples, mas agora com três componentes, uma fonte de tensão ( $V_1$ ) e dois resistores ( $R_1$  e  $R_2$ ). A mesma figura mostra a identificação das grandezas a serem determinadas ( $I_1$ ,  $I_{R1}$ ,  $I_{R2}$ ,  $V_{R1}$  e  $V_{R2}$ ).

A partir do circuito dado e da identificação das variáveis a serem determinadas, se mostra na Figura 9 o novo circuito, agora com a identificação das malhas e nós. Note que o circuito tem dois nós e duas malhas. As correntes nos elementos mostradas na Figura 8 foram retiradas na Figura 9 para não se confundir as mesmas com as correntes das malhas, que são  $I_{m1}$  e  $I_{m2}$ . Atente que estamos usando o termo m, para identificar que são correntes fictícias das malhas. Do mesmo modo, as quedas de tensão nos resistores ( $V_{R1}$  e  $V_{R2}$ ) foram retiradas, pois devem ser atribuídas conforme o sentido das correntes das malhas ( $I_{m1}$  e  $I_{m2}$ ) ao se aplicar a Lei de Kirchhoff das Tensões na malha fechada correspondente.

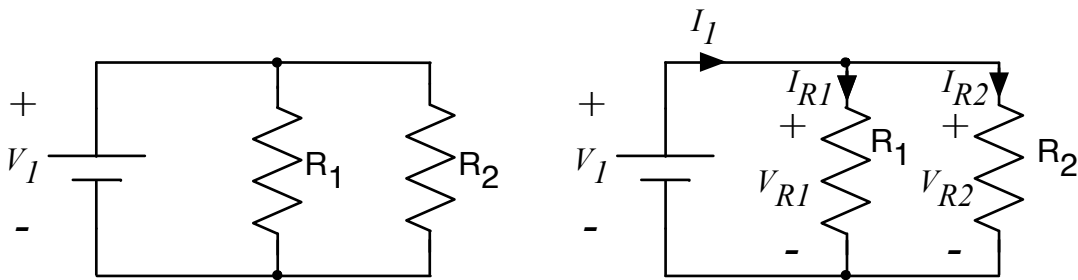


Figura 8 – Análise de malhas em circuito com duas malhas.

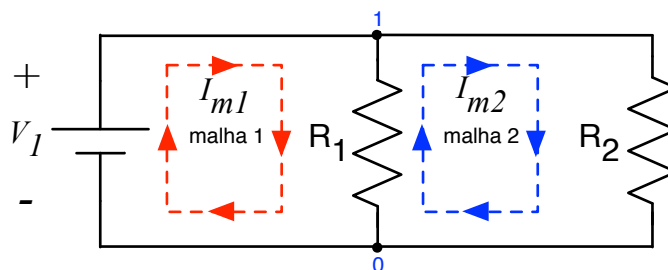


Figura 9 – Análise de malhas em circuito com duas malhas.

Aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões ao longo da malha 1 se obtém a expressão a seguir, onde se escreveram as quedas de tensão diretamente usando a Lei de Ohm:

$$-V_1 + R_1 \cdot I_{m1} - R_1 \cdot I_{m2} = 0 \rightarrow R_1 \cdot I_{m1} - R_1 \cdot I_{m2} = V_1$$

Para a malha 2 se tem:

$$+R_1 \cdot I_{m2} - R_1 \cdot I_{m1} + R_2 \cdot I_{m2} = 0 \rightarrow -R_1 \cdot I_{m1} + I_{m2} \cdot (R_1 + R_2) = 0$$

Assim, o sistema terá duas equações:

$$\begin{cases} R_1 \cdot I_{m1} - R_1 \cdot I_{m2} = V_1 \\ -R_1 \cdot I_{m1} + I_{m2} \cdot (R_1 + R_2) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, se obterá as correntes  $I_{m1}$  e  $I_{m2}$ . Por sua vez, as correntes em cada elemento do circuito original eram:

$$I_1 = I_{m1}$$

$$I_{R1} = I_{m1} - I_{m2}$$

$$I_{R2} = I_{m2}$$

As tensões nos elementos do circuito são:

$$V_{R1} = V_{R2} = V_1$$

Note que fazer a análise deste circuito utilizando análise de malhas implica em resolver um sistema de equações e diversos cálculos. O estudo deste circuito realizado no capítulo de circuitos resistores em paralelo foi realizado utilizando unicamente a Lei de Ohm e considerando que as tensões em todos os elementos são iguais, o que pode ser demonstrado pela aplicação da Lei de Kirchhoff das Tensões. O intuito aqui foi aplicar a metodologia de análise de malhas, visando entender sua aplicação, mesmo em circuito ainda simples.

### Exemplo 3:

Uma fonte de tensão possui tensão de 12 V está conectada em dois resistores,  $R_1$  e  $R_2$ , conforme o circuito da Figura 8. Os resistores tem resistência de  $5 \Omega$  ( $R_1$ ) e  $3 \Omega$  ( $R_2$ ). Determine as correntes e tensões nos resistores.

A tensão em todos os elementos é igual, visto se tratar de um circuito paralelo de 3 elementos. Assim:

$$V_{R1} = V_{R2} = V_1 = 12V$$

Aplicando a análise de malhas, conforme visto acima, o sistema obtido será:

$$\begin{cases} 5 \cdot I_{m1} - 5 \cdot I_{m2} = 12 \\ -5 \cdot I_{m1} + I_{m2} \cdot (5 + 3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 \cdot I_{m1} - 5 \cdot I_{m2} = 12 \\ -5 \cdot I_{m1} + I_{m2} \cdot 8 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, se tem:

$$I_{m1} = 6,4 A$$

$$I_{m2} = 4 A$$

As correntes nos elementos serão:

$$I_1 = I_{m1} = 6,4 A$$

$$I_{R1} = I_{m1} - I_{m2} = 6,4 - 4 = 2,4 A$$

$$I_{R2} = I_{m2} = 4 A$$

#### Exemplo 4:

A Figura 10 apresenta novamente o circuito discutido no início deste capítulo. Este circuito tem duas fontes de tensão, sendo  $V_1 = 12 V$  e  $V_2 = 5 V$ ; e três resistores, sendo eles  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$  e  $R_3 = 3 \Omega$ . Determine a corrente e tensão no resistor  $R_2$ .

A corrente no resistor  $R_2$ , considerando a mesma circulando no ramo entre os nós 2 e 0, será:

$$I_{R2} = I_{m1} - I_{m2}$$

A tensão no resistor  $R_2$  será:

$$V_{R2} = V_{20}$$

A tensão entre dois nós, como no caso anterior entre os nós 2 e 0, é  $V_{20}$ , onde o primeiro número é o nó inicial (2) e o último número é o nó final (0).

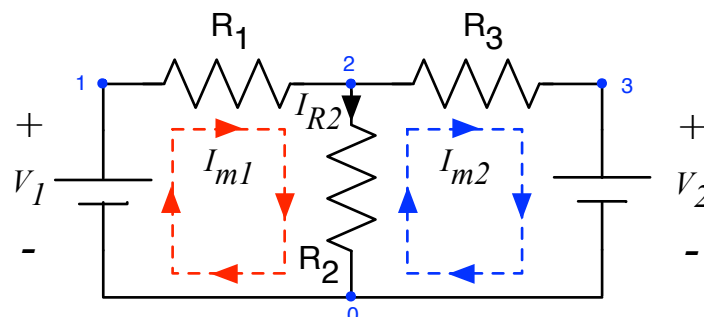


Figura 10 – Análise de malhas em circuito com duas malhas.

Aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões ao longo da malha 1 se tem:

$$-V_1 + R_1 \cdot I_{m1} + R_2 \cdot I_{m1} - R_2 \cdot I_{m2} = 0 \rightarrow (R_1 + R_2) \cdot I_{m1} - R_2 \cdot I_{m2} = V_1$$

Para a malha 2 se tem:

$$+R_2 \cdot I_{m2} - R_2 \cdot I_{m1} + R_3 \cdot I_{m2} + V_2 = 0 \rightarrow -R_2 \cdot I_{m1} + (R_2 + R_3) \cdot I_{m2} = -V_2$$

Assim, o sistema terá duas equações, que após resolvido resulta em:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) \cdot I_{m1} - R_2 \cdot I_{m2} = V_1 \\ -R_2 \cdot I_{m1} + (R_2 + R_3) \cdot I_{m2} = -V_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 \cdot I_{m1} - 2 \cdot I_{m2} = 12 \\ -2 \cdot I_{m1} + I_{m2} \cdot 5 = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_{m1} = 1,61 A \\ I_{m2} = -0,35 A \end{cases}$$

Finalmente, a corrente no resistor  $R_2$  será:

$$I_{R2} = I_{m1} - I_{m2} = 1,61 - (-0,35) = 1,96 A$$

Assim, sua tensão será:

$$V_{R2} = R_2 \cdot I_{R2} = 2 \cdot 1,96 = 3,92 V$$

### 3.1 Circuito com Três Malhas

O circuito da Figura 11 apresenta um circuito mais complexo, que possui seis componentes, duas fontes de tensão ( $v_1$  e  $v_2$ ) e quatro resistores ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$ ). O objetivo será aplicar a análise de malhas ao circuito dado e se obter as correntes e tensões nos elementos do mesmo.

A identificação das correntes das malhas foi realizada na Figura 12, onde se nota a presença de três malhas e quatro nós. Note, por inspeção, que as correntes nos resistores serão:

$$I_{R1} = I_{m1}$$

$$I_{R2} = I_{m2} - I_{m1}$$

$$I_{R3} = I_{m2} - I_{m3}$$

$$I_{R4} = I_{m3} - I_{m1}$$

A tensão sobre cada resistor será obtida, após se conhecer sua corrente, aplicando a Lei de Ohm no mesmo.

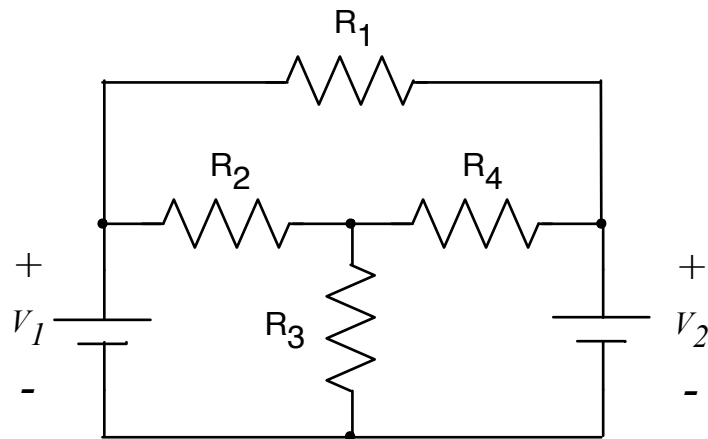


Figura 11 – Análise de malhas em circuito com três malhas.

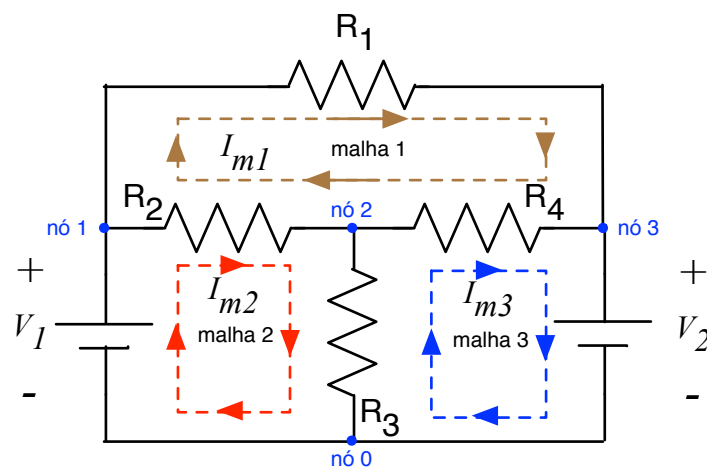


Figura 12 – Análise de malhas em circuito com três malhas.

Aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões ao longo da malha 1 se tem:

$$+R_1 \cdot I_{m1} + R_4 \cdot I_{m1} - R_4 \cdot I_{m3} + R_2 \cdot I_{m1} - R_2 \cdot I_{m2} = 0$$

$$(R_1 + R_2 + R_4) \cdot I_{m1} - R_2 \cdot I_{m2} - R_4 \cdot I_{m3} = 0$$

Para a malha 2 se tem:

$$-V_1 + R_2 \cdot I_{m2} - R_2 \cdot I_{m1} + R_3 \cdot I_{m2} - R_3 \cdot I_{m3} = 0$$

$$-R_2 \cdot I_{m1} + (R_2 + R_3) \cdot I_{m2} - R_3 \cdot I_{m3} = V_1$$

Para a malha 3 se obtém:

$$+R_3 \cdot I_{m3} - R_3 \cdot I_{m2} + R_4 \cdot I_{m3} - R_4 \cdot I_{m1} + V_2 = 0$$

$$-R_4 \cdot I_{m1} - R_3 \cdot I_{m2} + (R_3 + R_4) \cdot I_{m3} = -V_2$$



Assim, o sistema terá três equações:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_4) \cdot I_{m1} - R_2 \cdot I_{m2} - R_4 \cdot I_{m3} = 0 \\ -R_2 \cdot I_{m1} + (R_2 + R_3) \cdot I_{m2} - R_3 \cdot I_{m3} = V_1 \\ -R_4 \cdot I_{m1} - R_3 \cdot I_{m2} + (R_3 + R_4) \cdot I_{m3} = -V_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, se obterá as correntes  $I_{m1}$ ,  $I_{m2}$  e  $I_{m3}$ .

### Exemplo 5:

Duas fontes de tensão, tendo  $V_1 = 12\text{ V}$  e  $V_2 = 5\text{ V}$ , estão conectadas em quatro resistores, sendo eles:  $R_1 = 10\ \Omega$ ,  $R_2 = 5\ \Omega$ ,  $R_3 = 2\ \Omega$  e  $R_4 = 3\ \Omega$ ; conforme mostrado na Figura 11. Determine a corrente e a tensão no resistor  $R_3$ .

O circuito é idêntico ao explicado anteriormente, então o sistema de equações resolvido será:

$$\begin{cases} 18 \cdot I_{m1} - 5 \cdot I_{m2} - 3 \cdot I_{m3} = 0 \\ -5 \cdot I_{m1} + 7 \cdot I_{m2} - 2 \cdot I_{m3} = 12 \\ -3 \cdot I_{m1} - 2 \cdot I_{m2} + 5 \cdot I_{m3} = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_{m1} = 0,7\text{ A} \\ I_{m2} = 2,31\text{ A} \\ I_{m3} = 0,35\text{ A} \end{cases}$$

Assim, a corrente no resistor  $R_3$  será dada por:

$$I_{R3} = I_{m2} - I_{m3} = 2,31 - 0,35 = 1,96\text{ A}$$

Logo, a tensão neste resistor será:

$$V_{R3} = R_3 \cdot I_{R3} = 2 \cdot 1,96 = 3,92\text{ V}$$

Note que o valor obtido é igual ao exemplo 4, mesmo tendo um resistor a mais.

## 3.1 Super Malhas

A Figura 13 apresenta um circuito com fonte de corrente. Neste caso não é possível utilizar a análise de malhas diretamente, pois ao escrever as quedas de tensão sobre os elementos, não seria possível determinar a tensão sobre a fonte de corrente, isto é, entre os nós 2 e 0. Assim, uma alternativa é fazer uso da ideia de super malha, que consiste em definir uma malha em que não esteja envolvida a fonte de corrente. No circuito em questão será uma malha externa ao circuito.

Assim, aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões para a super malha, se tem:

$$-V_1 + R_1 \cdot I_{m1} + R_2 \cdot I_{m2} + V_2 = 0 \rightarrow R_1 \cdot I_{m1} + R_2 \cdot I_{m2} = V_1 - V_2$$

Além disso, a aplicação da Lei de Kirchhoff das Correntes no nó 2 permitirá encontrar a expressão a seguir:

$$I_{m1} + I_1 - I_{m2} = 0 \rightarrow I_{m2} - I_{m1} = I_1$$

Assim, se tem um sistema com duas incógnitas e duas expressões e que poderá ser resolvido:

$$\begin{cases} R_1 \cdot I_{m1} + R_2 \cdot I_{m2} = V_1 - V_2 \\ I_{m2} - I_{m1} = I_1 \end{cases}$$

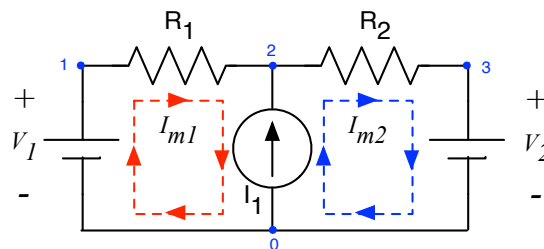


Figura 13 – Circuito com fonte de corrente.

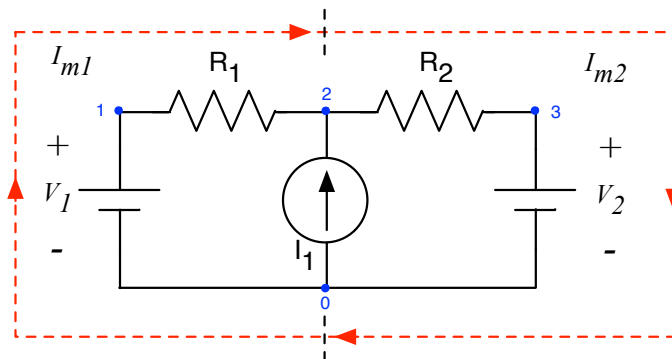


Figura 14 – Super malha para análise de circuitos.

## 4 Exercícios

### Exercícios Resolvidos

**ER 01.** Explique o que é análise de malhas.

A análise de malhas é uma técnica para resolver circuitos elétricos, onde se atribuem correntes fictícias às malhas do circuito e se determinam equações aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões ao longo da malha fechada.

**ER 02.** Explique o que são nós, ramos e malhas.

Nó é um ponto do circuito onde dois ou mais componentes estão conectados. Ramo é o caminho entre um nó e outro, tendo-se a mesma corrente ao longo dos componentes do ramo. Malha é um caminho fechado, no qual se pode aplicar a Lei de Kirchhoff das Tensões.

**ER 03.** O circuito mostrado na Figura 15 tem uma fonte de alimentação de 10 V e resistores  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$  e  $R_3 = 3 \Omega$ . Determine a corrente no resistor  $R_3$ .

Inicialmente faremos a identificação das malhas do circuito, que são duas, conforme mostrado na Figura 16.

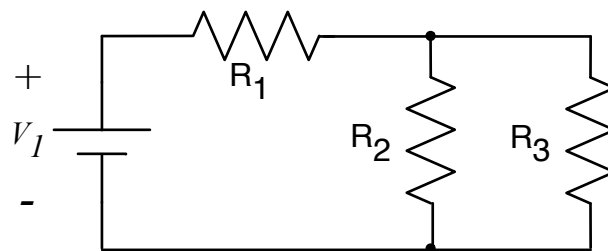


Figura 15 – Circuito para análise.

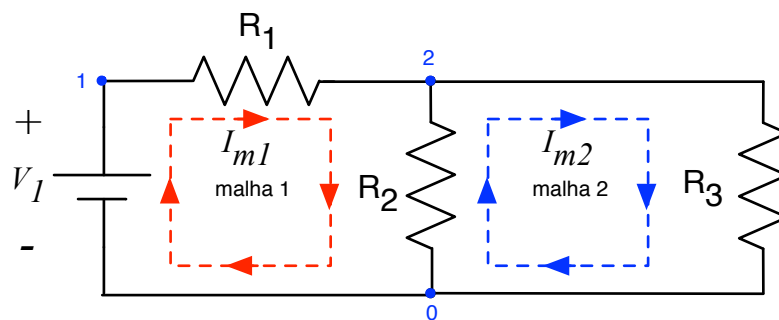


Figura 16 – Circuito com as malhas e nós identificados.

Escrevendo a equação da malha 1, se obtém:

$$-V_1 + R_1 \cdot I_{m1} + R_2 \cdot I_{m1} - R_2 \cdot I_{m2} = 0 \rightarrow (R_1 + R_2) \cdot I_{m1} - R_2 \cdot I_{m2} = V_1$$

Para a malha 2 teremos:

$$+R_2 \cdot I_{m2} - R_2 \cdot I_{m1} + R_3 \cdot I_{m2} = 0 \rightarrow -R_2 \cdot I_{m1} + (R_2 + R_3) \cdot I_{m2} = 0$$

O sistema de equações e sua resolução serão:

$$\begin{cases} 15 \cdot I_{m1} - 5 \cdot I_{m2} = 10 \\ -5 \cdot I_{m1} + 8 \cdot I_{m2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_{m1} = 0,84 A \\ I_{m2} = 0,53 A \end{cases}$$

A corrente no resistor  $R_3$  é igual a corrente de malha 2, ou seja, 0,53 A.

**ER 04.** O circuito da Figura 17 possui duas fontes de alimentação, sendo elas  $V_1 = 10\text{ V}$  e  $V_2 = 6\text{ V}$ ; e três resistores, sendo eles  $R_1 = 10\ \Omega$ ,  $R_2 = 5\ \Omega$  e  $R_3 = 3\ \Omega$ . Determine a corrente no resistor  $R_1$ .

A identificação das correntes das malhas e nós do circuito é mostrada na Figura 18 onde se nota que o circuito tem duas malhas, sendo a corrente no resistor  $R_1$  igual a corrente da malha 1.

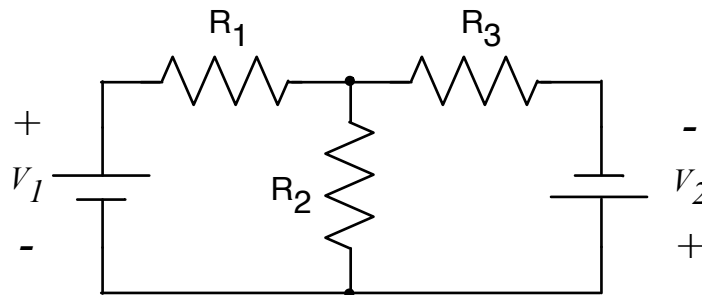


Figura 17 – Circuito para análise.

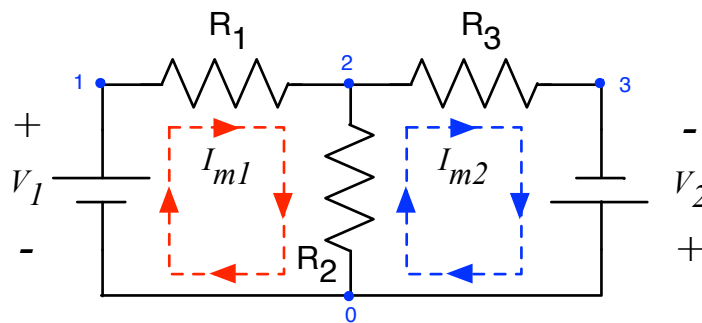


Figura 18 – Circuito com as malhas e nós identificados.

Escrevendo a equação da malha 1, se obtém que:

$$-V_1 + R_1 \cdot I_{m1} + R_2 \cdot I_{m1} - R_2 \cdot I_{m2} = 0 \rightarrow (R_1 + R_2) \cdot I_{m1} - R_2 \cdot I_{m2} = V_1$$

Para a malha 2 se tem:

$$+R_2 \cdot I_{m2} - R_2 \cdot I_{m1} + R_3 \cdot I_{m2} - V_2 = 0 \rightarrow -R_2 \cdot I_{m1} + (R_2 + R_3) \cdot I_{m2} = V_2$$

O sistema e sua solução serão:

$$\begin{cases} 15 \cdot I_{m1} - 5 \cdot I_{m2} = 10 \\ -5 \cdot I_{m1} + 8 \cdot I_{m2} = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_{m1} = 1,16\text{ A} \\ I_{m2} = 1,47\text{ A} \end{cases}$$

A corrente no resistor  $R_1$  é igual a  $I_{m1}$ , sendo 1,16 A.

**ER 05.** Comprove que a análise realizada no exercício anterior está correta.

Para comprovar a análise realizada, iremos determinar a tensão sobre os resistores e a seguir aplicar a Lei de Kirchhoff das Tensões, verificando se o resultado corresponde aos valores obtidos.

A tensão em  $R_1$  será:

$$V_{R1} = R_1 \cdot I_{R1} = R_1 \cdot I_{m1} = 10 \cdot 1,16 = 11,6V$$

A tensão em  $R_2$  será:

$$V_{R2} = R_2 \cdot I_{R2} = R_2 \cdot (I_{m1} - I_{m2}) = 5 \cdot (1,16 - 1,47) = -1,55V$$

Em  $R_3$  se tem:

$$V_{R3} = R_3 \cdot I_{R3} = R_3 \cdot I_{m2} = 3 \cdot 1,47 = 4,41V$$

Agora, escrevendo as Leis de Kirchhoff para as duas malhas se tem:

$$-V_1 + V_{R1} + V_{R2} = 0 \rightarrow -10 + 11,6 - 1,55 = 0 \rightarrow 0,05 \cong 0$$

$$-V_2 - V_{R2} + V_{R3} = 0 \rightarrow -6 + 1,55 + 4,41 = 0 \rightarrow -0,04 \cong 0$$

## Exercícios Propostos

**EP 01.** Um circuito que tem duas malhas, terá quantas expressões com variáveis desconhecidas a serem calculadas?

**EP 02.** No circuito da Figura 15 a fonte de alimentação tem amplitude de 5 V e os resistores são  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$  e  $R_3 = 3 \Omega$ . Determine a corrente no resistor  $R_2$ .

**EP 03.** Determine a tensão sobre o resistor  $R_1$  no circuito do exemplo 4.

**EP 04.** No circuito da Figura 2 as fontes de alimentação tem amplitudes de  $V_1 = 5 V$  e  $V_2 = 10 V$  e os resistores são  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$  e  $R_3 = 3 \Omega$ . Determine a corrente no resistor  $R_2$ .

**EP 05.** No circuito da Figura 2 as fontes de alimentação tem amplitudes de  $V_1 = 10 V$  e  $V_2 = 5 V$  e os resistores são  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$  e  $R_3 = 3 \Omega$ . Determine a corrente no resistor  $R_2$ .

## 5 Atividade Avaliativa

### 5.1 Introdução – O que preciso saber

Ao final deste objetivo de aprendizagem são apresentadas cinco questões, que devem ser respondidas sem consultar o material. Se você conseguir responder as questões e conferir as respostas com o gabarito abaixo, parabéns, você concluiu com êxito este tópico. Caso tenha errado alguma questão, revise o conteúdo relacionado com a mesma e refaça a questão, procurando se concentrar mais desta vez, para acertar a mesma e fixar bem o conteúdo.

**AA 01.** A resolução do sistema de equações na análise de malhas resulta em respostas para as tensões ou correntes do circuito?

**AA 02.** Um circuito que possui três malhas terá quantas equações e variáveis a serem determinadas?

**AA 03.** Considere o circuito da Figura 10, onde os valores dos elementos são:  $V_1 = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$  e  $V_2 = 0$ . Determine a corrente no resistor  $R_2$ .

**AA 04.** Considere o circuito da Figura 10, onde os valores dos elementos são:  $V_1 = 0$ ,  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$  e  $V_2 = 10$ . Determine a corrente no resistor  $R_2$ .

**AA 05.** Considere o circuito da Figura 10, onde os valores dos elementos são:  $V_1 = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$  e  $V_2 = 10 \text{ V}$ . Determine a corrente no resistor  $R_2$ .

AA 01. A resolução do sistema de equações na análise de malhas resulta em respostas para as correntes do circuito.

AA 02. Se o circuito possui três malhas, então terá três equações e três correntes a serem calculadas.

AA 03. O sistema de equações a ser resolvido tem a forma do exemplo 4, sendo dado por:

$$(R_1 + R_2) x I_{m1} - R_2 x I_{m2} = V_1 e - R_2 x I_{m1} + (R_2 + R_3) x I_{m2} = -V_2.$$

Então o sistema de equações será:  $8 x I_{m1} - 3 x I_{m2} = 10$  e  $-3 x I_{m1} + 8 x I_{m2} = 0$ . As correntes serão:  $I_{m1} = 1,45 \text{ A}$  e  $I_{m2} = 0,55 \text{ A}$ . Assim, a corrente no resistor  $R_2$  será  $I_{R2} = I_{m1} - I_{m2} = 1,45 - 0,55 = 0,9 \text{ A}$ .

AA 04. O sistema de equações é semelhante a questão anterior, sendo dado por:  $8 x I_{m1} - 3 x I_{m2} = 0$  e  $-3 x I_{m1} + 8 x I_{m2} = -10$ . As correntes serão:  $I_{m1} = 0,55 \text{ A}$  e  $I_{m2} = 1,45 \text{ A}$ . Assim, a corrente no resistor  $R_2$  será  $I_{R2} = I_{m1} - I_{m2} = 0,55 - 1,45 = -0,9 \text{ A}$ .

AA 05. O sistema de equações é semelhante a questão anterior, sendo dado por:  $8 x I_{m1} - 3 x I_{m2} = 10$  e  $-3 x I_{m1} + 8 x I_{m2} = -10$ . As correntes serão:  $I_{m1} = 0,91 \text{ A}$  e  $I_{m2} = -0,91 \text{ A}$ . Assim, a corrente no resistor  $R_2$  será  $I_{R2} = I_{m1} - I_{m2} = 0,91 + 0,91 = 1,82 \text{ A}$ .