

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
 EEL7040 – Circuitos Elétricos I - Laboratório

AULA 02
VOLTÍMETRO E AMPERÍMETRO DE CORRENTE CONTÍNUA
ANEXOS PÓS-AULA

1 VARIAÇÃO NA TENSÃO DEVIDO A TOLERÂNCIA DOS RESISTORES

Considere o circuito da figura 1. Deseja-se calcular a tensão sobre o resistor R_x (V_{AB}) e em seguida determinar como esta tensão pode variar devido à tolerância dos resistores do circuito.

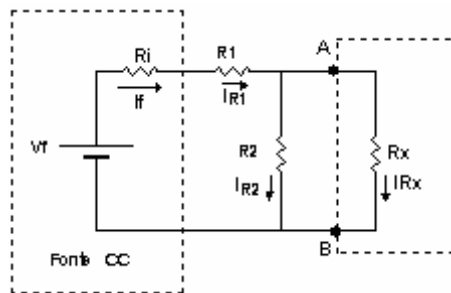


Figura 1 - Circuito exemplo.

- V_f – fonte de tensão de 15 V;
- R_i – resistência interna da fonte;
- $R_1 = 12 \text{ k}\Omega \pm 5\%$ com potência de 1/8 W;
- $R_2 = 120 \text{ }\Omega \pm 5\%$ com potência de 1/8 W;
- $R_x = 1,2 \text{ k}\Omega \pm 5\%$ com potência de 1/8 W.

Os dados para o circuito são:

$$V_f = 15 \text{ V};$$

$$R_i = 0 \text{ }\Omega;$$

$$R_1 = (R_1 \pm 5\%) = (12 \pm 0,6) \text{ k}\Omega \quad \Delta R_1 = 600 \text{ }\Omega;$$

$$R_2 = (R_2 \pm 5\%) = (120 \pm 6) \text{ }\Omega \quad \Delta R_2 = 6 \text{ }\Omega;$$

$$R_x = (R_x \pm 5\%) = (1,2 \pm 0,06) \text{ k}\Omega \quad \Delta R_x = 60 \text{ }\Omega.$$

Note que a fonte é considerada constante e com resistência interna nula.

A corrente no circuito pode ser determinada por:

$$I_f = I_{R1} = \frac{V_f}{R_T} = \frac{V_f}{R_1 + R_2 // R_x}$$

$$I_f = \frac{V_f}{R_1 + R_2 // R_x} = \frac{V_f}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_x}{R_2 + R_x}} = V_f \cdot \frac{R_2 + R_x}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_x + R_2 \cdot R_x}$$

A tensão sobre o resistor R_x (V_{AB}) será dada por:

$$V_x = V_{AB} = V_f \cdot \frac{R_2 // R_x}{R_T} = V_f \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot R_x}{R_2 + R_x}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_x}{R_2 + R_x}}$$

$$V_x = V_f \cdot \frac{R_2 \cdot R_x}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_x + R_2 \cdot R_x}$$

Resta agora determinar a variação (erro) na tensão V_x devido às tolerâncias dos resistores. Isto pode ser determinado conforme segue:

$$\delta V_x = \left| \frac{\partial V_x}{\partial R_1} \right| \Delta R_1 + \left| \frac{\partial V_x}{\partial R_2} \right| \Delta R_2 + \left| \frac{\partial V_x}{\partial R_x} \right| \Delta R_x$$

Cada termo da expressão anterior será determinado calculando a derivada parcial em relação ao resistor específico. Assim, o primeiro termo será:

$$\delta V_x^1 = \left| \frac{\partial V_x}{\partial R_1} \right| \Delta R_1 = \left| \frac{\partial \left(V_f \cdot \frac{R_2 \cdot R_x}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_x + R_2 \cdot R_x} \right)}{\partial R_1} \right| \Delta R_1$$

$$\delta V_x^1 = \left| -V_f \frac{R_2 \cdot R_x \cdot (R_2 + R_x)}{(R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_x + R_2 \cdot R_x)^2} \right| \Delta R_1$$

O segundo termo é:

$$\delta V_x^2 = \left| \frac{\partial V_x}{\partial R_2} \right| \Delta R_2 = \left| \frac{\partial \left(V_f \cdot \frac{R_2 \cdot R_x}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_x + R_2 \cdot R_x} \right)}{\partial R_2} \right| \Delta R_2$$

$$\delta V_x^2 = \left| V_f \frac{R_1 \cdot R_x^2}{(R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_x + R_2 \cdot R_x)^2} \right| \Delta R_2$$

O terceiro termo é dado por:

$$\delta V_x^3 = \left| \frac{\partial V_x}{\partial R_x} \right| \Delta R_x = \left| \frac{\partial \left(V_f \cdot \frac{R_2 \cdot R_x}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_x + R_2 \cdot R_x} \right)}{\partial R_x} \right| \Delta R_x$$

$$\delta V_x^3 = \left| V_f \frac{R_1 \cdot R_2^2}{(R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_x + R_2 \cdot R_x)^2} \right| \Delta R_x$$

Então, finalmente, a tensão V_x pode ser determinada numericamente:

$$V_x = V_f \cdot \frac{R_2 \cdot R_x}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_x + R_2 \cdot R_x} = 15 \cdot \frac{120 \cdot 1200}{12000 \cdot 120 + 12000 \cdot 1200 + 120 \cdot 1200}$$

$$V_x = 0,135V$$

Os termos que compõem o erro de V_x serão:

$$\delta V_x^1 = \left| -V_f \frac{R_2 \cdot R_x \cdot (R_2 + R_x)}{(R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_x + R_2 \cdot R_x)^2} \right| \Delta R_1 = 6,696 \cdot 10^{-3} V$$

$$\delta V_x^2 = \left| V_f \frac{R_1 \cdot R_x^2}{(R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_x + R_2 \cdot R_x)^2} \right| \Delta R_2 = 6,087 \cdot 10^{-3} V$$

$$\delta V_x^3 = \left| V_f \frac{R_1 \cdot R_2^2}{(R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_x + R_2 \cdot R_x)^2} \right| \Delta R_x = 6,087 \cdot 10^{-4} V$$

$$\delta V_x = \Delta V_x = \delta V_x^1 + \delta V_x^2 + \delta V_x^3 = 0,013V$$

Portanto:

$$V_x = (0,135 \pm 0,013)V$$

Os valores extremos de V_x serão:

$$V_x \uparrow = 0,135 + 0,013 = 0,149V$$

$$V_x \downarrow = 0,135 - 0,013 = 0,122V$$

Podem-se obter estes valores usando um raciocínio intuitivo, que neste exemplo funciona perfeitamente.

Analisando a expressão da tensão em V_x (repetida abaixo) e supondo que se deseja determinar seu maior valor, é intuitivo supor que os resistores R_2 e R_x devem ser tomados com seus maiores valores, enquanto o resistor R_1 deve ser tomado com seu menor valor.

$$V_x = V_f \cdot \frac{R_2 \cdot R_x}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_x + R_2 \cdot R_x}$$

$$V_x \uparrow = V_f \cdot \frac{(R_2 + \Delta R_2) \cdot (R_x + \Delta R_x)}{(R_1 - \Delta R_1) \cdot (R_2 + \Delta R_2) + (R_1 - \Delta R_1) \cdot (R_x + \Delta R_x) + (R_2 + \Delta R_2) \cdot (R_x + \Delta R_x)}$$

$$V_x \uparrow = 0,149V$$

Se for desejado o menor valor de V_x , então se supõe que R_2 e R_x devem ser tomados com seus menores valores, enquanto R_1 será tomado com seu maior valor.

$$V_x \downarrow = V_f \cdot \frac{(R_2 - \Delta R_2) \cdot (R_x - \Delta R_x)}{(R_1 + \Delta R_1) \cdot (R_2 - \Delta R_2) + (R_1 + \Delta R_1) \cdot (R_x - \Delta R_x) + (R_2 - \Delta R_2) \cdot (R_x - \Delta R_x)}$$

$$V_x \downarrow = 0,122V$$

Neste exemplo, não foi difícil perceber quais resistores deveriam ser assumidos com seu maior valor, ou quais deveriam ser assumidos com seu menor valor. Dependendo da complexidade da expressão, a decisão de quais variáveis devem ser aumentadas e quais devem ser diminuídas pode ser difícil, além disso, o risco de se obter resultados errôneos sempre estará presente, a não ser que sejam testadas todas as possibilidades.

Desta forma, usando derivadas parciais se tem a garantia de estar assumindo os valores corretos e obtendo as respostas corretas também, apesar do cálculo realizado ser mais penoso.

2 ERRO DE INSERÇÃO DE AMPERÍMETROS

O erro de inserção do amperímetro é determinado considerando-se a inserção da resistência interna do amperímetro, esta ficará em série com o circuito no qual se está medindo a corrente, conforme pode ser visto na figura 2.

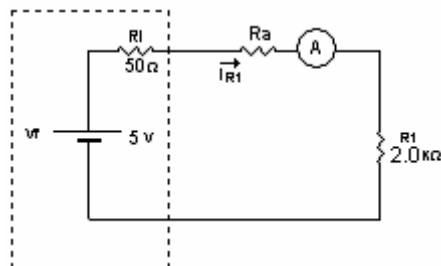


Figura 2 – Circuito considerando a resistência interna do amperímetro.

Basicamente se deve calcular a nova corrente I_{R1} considerando agora a resistência R_a como parte do circuito. Para tanto, é necessário conhecer o valor de R_a , dado pelo fabricante do instrumento. Abaixo são mostrados os dados fornecidos pelos fabricantes dos multímetros analógico e digital.

Dados do multímetro ENGRO 484

Instr.	ESCALA	IC (%)	S (k Ω /V)	n° div	Resist. Int. (Ω)		Erros		
					Volt. R_v	Amp R_a	ε_L	ε_{IC}	$\Delta = \varepsilon_L + \varepsilon_{IC}$
AMP. CC	50 μ A	3	---	60		6 k Ω	0,42 μ A	1,5 μ A	1,92 μ A
	3 mA	3	---	60		210 Ω	25 μ A	0,09 mA	0,115 mA
	30 mA	3	---	60		20 Ω	0,25 mA	0,9 mA	1,15 mA
	300 mA	3	---	60		2 Ω	2,5 mA	9 mA	11,5 mA
	3 A	3	---	60		1 Ω	25 mA	90 mA	115 mA

Dados do multímetro digital DAWER (DM 2020)

Escalas DC A

Escala	Resolução	Precisão	Queda de Tensão	Proteção contra sobrecarga
200 μ A	0,1 μ A	$\pm 0,8\% + 1$ dígito	0,3 V	0,5 A/250 V
20 mA	10 μ A			
200 mA	100 μ A			
20 A	10 mA	$\pm 1,5\% + 1$ dígito	0,7 V	Nenhuma

Escalas AC A

Escala	Resolução	Precisão	Queda de Tensão	Proteção contra sobrecarga
20 mA	10 μ A	$\pm 1,2\% + 3$ dígito	0,3 V	0,5 A/250 V
200 mA	100 μ A			
20 A	10 mA	$\pm 1,8\% + 3$ dígito	0,7 V	Nenhuma

Nota-se que para os multímetros analógicos o fabricante fornece diretamente a resistência R_a . Já no caso dos instrumentos digitais é fornecida a queda de tensão que o instrumento causa no circuito.

Desta forma, para os instrumentos digitais deve-se determinar a resistência R_a em função da escala de corrente usada.

$$R_{a_analógico} = R_{a_fabricante}$$

$$R_{a_digital} = \frac{\text{Queda de tensão}}{\text{Corrente}}$$

Então, por exemplo, na escala de 30 mA, o multímetro analógico terá uma resistência interna (R_a) de 20 Ω . Já para o multímetro digital, usando a escala de 20 mA, teremos que calcular a resistência. Portanto:

$$R_{a_analógico} = R_{a_fabricante} = 20\Omega$$

$$R_{a_digital} = \frac{\text{Queda de tensão}}{\text{Corrente}} = \frac{0,3}{20 \cdot 10^{-3}} = 15\Omega$$